Memoir udf

Isomorphism of Function of 3-2-valued Logic

Isomorphism of Function of 3-2-valued Logic :
Gedeon Nzingula*

Contents

Contents

ISOMORPHISM OF FUNCTION OF 3-2-VALUED LOGIC

Gedeon Nzingula*
Juin 2024

To Gracie and Minard

INTRODUCTION

Il existe une relation de satisfaction entre des individus et des formules (dans le cas du langage L1 et L0). D’autres méthodes s’écartent de cette approche classique par exemple en renonçant au principe de bivalence. En 1920 le philosophe et logicien polonais Jan Lukasiewics (1978-1956) fut l’un des premiers à proposer une sémantique à trois valeurs de verité Cf. Jan Lukasiewicz, Ecrits logiques et philosophiques, Paris, Vrin, 2013. Lui-même et d’autres logiciens ont également développé des sémantiques à plus de trois valeurs de vérité suivi par le formalisme du logicien américain S. Cole Kleene. Ici le formalisme de la logique “polyvalente” étudié est celui de Kleene. S. Cole Kleene est connu pour avoir fondé la branche de la logique mathématique qui porte le nom de théorie de la récursion, en collaboration avec notamment Alonzo Church, Kurt Gödel, Emil Post et Alan Turing, et aussi le lambda-calcul avec Alonzo Church et John Barkley Rosser et une branche de la logique “trivalente” avec “N” valuation. On parle généralement de logique plurivalente lorsque l'interprétation d’un langage logique admet plus de deux valeurs de vérité. Les logiques trivalentes montrent qu’il existe en fait d’autres possibilités que la sémantique classique à deux valeurs pour l'interprétation des constantes logiques de L0 et de L1.

Le papier convient d’examiner en détails les formules et théorèmes de L0 et de L1 classique et démontrer s’ils restent correctes ou conservés donc isomorphes comme tels dans les transformations des formules de L0 et de L1 “trivalente” de Kleene. L’exercice consiste à formuler des formules de L0 ou L1 classique et en L0 ou L1 “trivalent” pour démontrer si c’est vrai ou faux si l'interprétation classique de la valuation “v” est égale ou isomorphe à l'interprétation “trivalente” de N valeur forte et faible de Kleene.

Nous nous proposons de présenter rapidement les méthodes formels de la sémantique classique pour introduire le formalisme de la logique “trivalente” après ce développement.

Chapter I.

3-2-valued Logic isomorphism

thr.1.1 Introduction

Le papier convient d'examiner en détails les isomorphismes des groupes des formules et théorèmes de L0 et de L1 classique et démontrer s'il reste correctes ou conservés donc isomorphe comme tels dans les transformations des formules de L0 et de L1 "trivalente" de Kleene. L'exercice consiste à formuler des formules de L0 ou L1 classique et en L0 ou L1 "trivalent" pour démontrer si c'est vrai ou faux si l'interprétation classique de la valuation "v" est égale ou isomorphe à l'interprétation "trivalente" de N valeur forte et faible de Kleene.

Nous nous proposons de présenter rapidement les méthodes formels de la sémantique classique pour introduire le formalisme de la logique "trivalente" après ce développement.

thr.1.2 2-valued logic

Dans la logique à 2 valeurs ou logique l0, l'énoncé « Juliette n'est pas venu. » n'est pas élémentaire considérée comme construit à partir de l'énoncé élémentaire « Juliette est venue » qui appartient à la sémantique de l0 ou la logique propositionnelle. Donc l'énoncé « Juliette n'est pas venu. » est construit à partir de cette énoncé plus simple auquel est appliquée une négation de l0, la forme

logique de « Juliette n’est pas venu. » est alors « non p ». On indique alors que l’opération logique de la négation a été appliquée à « p ». Comment définir cette opération de l0?
D’après le principe de bivalence tout énoncé est vrai ou faux. Pour définir un opérateur logique de l0 en l’occurrence l’opérateur logique de la négation, nous posons que son effet est d’inverser la valeur logique de l’énoncé auquel il est appliqué, c’est ainsi qu’on peut définir une opération d’ordre logique de l0 en l’occurrence pour ici la négation dans l0.

- si p est vrai, non p est faux
- Si p est faux, non p est vrai

Plusieurs expressions peuvent servir pour exprimer la négation en français, « ne pas », « non », « ne plus » etc. On peut ainsi introduire la notation de l0 et l1 qu’on appelle langage de l0 ou l1. Dans les langages de L0 ou L1 nous utilisons la notation (—), pour la négation et d’autres notations pareilles pour les autres opérateurs logiques. Si et seulement si le signe « p » représente un énoncé quelconque, « —p ».

Se lit « négation de p » ou « non p »
La négation est défini en l0 par le tableau de fonction amorphe suivant :

p	—p
V	F
F	V

Dans ce tableau fonctionnel , V et F représentent les deux valeurs de vérité, vrai et faux. Ce tableau est la première fonction de vérification de l0, ce tableau est donc la « table de vérité » qui définit la négation logique dans l0.

thr.1.3 Function of the 3 valued logic

La méthode d’interprétation et de transformation des langages formels que nous avons présentée est une sémantique classique, fondée sur l’attribution d’une valeur vérité (vraie ou fausse) à chaque lettre de proposition (les valeurs du langage L0).

D’autres méthodes s’écartent de cette approche classique par exemple en renonçant au principe de bivalence (vrai ou faux) avec une valeur neutre de N-valeur. En 1920 le philosophe et logicien polonais Jan Lukasiewics (1978-1956) fut l’un des premiers à proposer une sémantique à trois

valeurs de verité. Lui-même et d’autres logiciens ont également développé des sémantiques à plus de trois valeurs de vérité. On parle généralement de logique plurivalente lorsque l'interprétation d’un langage logique admet plus de deux valeurs de vérité. Les logiques trivalentes de Kleene montrent qu’il existe en fait d’autres possibilités que la sémantique classique à deux valeurs pour l'interprétation des constantes logiques de L0 et de L1.
Mais pourquoi vouloir renoncer au principe de bivalence? On peut estimer que certains énoncés n’ont pas de valeur de vérité, ou la valeur qu’il convient de leur attribuer n’est ni le vrai ni le faux. Nous indiquons ici seulement quelques-unes des raisons que des philosophes ont pu invoquer pour s’engager dans la direction d’une logique plurivalente.

1. Considérons la phrase suivante :

D’incolores idées vertes dorment furieusement.
Elle est grammaticalement irréprochable bien que son sens, si elle en a un, ne permette pas d’affirmer qu’elle est vraie ou fausse. Faut-il en conclure qu’elle n’est ni vraie ni fausse et qu’elle remet en question le principe de bivalence? Selon une autre analyse, il s’agit d’une phrase*
Qui n’est pas un énoncé, au sens où elle n’exprime aucune proposition.

2. Considérons la phrase suivante :

Le nombre des galets de la plage d’Etretat est impair. Ici, la difficulté est que le nombre de galets de la plage d’Etretat est mal défini, pas assez précisément, en tout cas, pour qu’on puisse affirmer qu’il est , de manière déterminée, pair ou impair (quelle est la taille limite au-delà de laquelle une concrétion minérale n’est plus un galet mais un grain de sable? Ou s'arrête, exactement, la plage d’Etretat? etc.). Un problème similaire se pose au sujet des prédicats vagues, comme dans les phrases “ceci est rouge” ou “ceci est un tas de sable”, dont la valeur de vérité peut être indéterminée dans le cas d’objets à la limite du rouge, ou dans celui d’assemblages de grains de sable à la limite de ce qui mérite le nom de “tas” Et que penser de l'énoncé suivant?
Une chaise cassée est encore une chaise.
A-t-il une valeur de vérité déterminée ?

3. Considérons l’énoncé :

L’actuel roi de France est chauve.
Le problème de cette phrase est qu’elle semble présupposer une proposition fausse (à savoir qu’il existe un actuel roi de France). Faut-il en conclure qu’elle n’a pas de valeur de vérité? Ou qu’elle n’exprime pas une proposition? Selon une autre analyse (celle de Russell) elle signifie en fait qu’il existe actuellement un roi de France et que ce roi est chauve. Il s’agirait donc d’un énoncé faux, et non pas d’une phrase dépourvue de valeur de vérité.

4. Au chapitre 9 de son traité De l’interprétation Aristote, soulève un problème devenu célèbre : celui des futurs contingents. L’énoncé “il y aura demain une bataille navale” est-il de manière déterminé, vrai ou faux aujourd’hui? Si tel est le cas, il semble que nous soyons soumis à un déterminisme implacable, car si l’énoncé est vrai, rien ne pourra nous faire éviter la bataille navale, et s’il est faux, rien ne pourra faire qu’elle ait lieu. Faut-il en conclure au déterminisme? Ou faut-il renoncer au principe de bivalence, et aux raisonnements dans lesquels nous faisons (implicitement ou explicitement) appel à lui?
5. Comment comprendre que tout énoncé soit, de manière déterminée, vrai ou faux, indépendamment de notre capacité à vérifier ce qu’il en est? Y aurait-il un monde, immuable, constitué de propositions vraies (des propositions pour ainsi dire “vraies en soi”) totalement indépendant de la connaissance que nous pouvons en avoir? Quel serait ce curieux monde, et comment y aurions nous accès? N’est-il pas étranger de supposer qu’il existe ? Et s’il n’existe pas ne faut-il pas admettre que certains énoncés,

dont nous ne pouvons pas connaître la valeur de vérité, ne sont ni vrais ni faux?

- Note : 1. Principe de bivalence est selon lequel tout énoncé est soit vrai soit faux, cf. chap.2,SS3, p.19.
- 2. Cf. Jan Lukasiewicz, Ecrits logiques et philosophiques, Paris, Vrin, 2013.
- 3. Les logiques plurivalentes ont par ailleurs des applications en linguistique et en intelligence artificielle.
- 4. Les prédicats vagues ont donné l'occasion de célèbres paradoxes logiques, nommés "sorites", connus depuis l'Antiquité (Eubulide de Milet en formule une version au IVe siècle avant J.C.) et encore très discuté aujourd'hui. Le mot "sorite" vient du terme grec "sofos" qui signifie précisément "tas". Cf. infra, p.19.
-
- Note : 2. Cf. Ci-dessous, p.302.

2. Cf. la note sur la question du réalisme, supra, chapitre 1, note 1, p.19

3. Cf. ci-dessous, p. 19.

6. Considérons l'énoncé suivant :

(1) L'énoncé (1) est vrai.

Cet énoncé est-il, de manière déterminée, vrai ou faux ? Comment justifier sa valeur de vérité, s'il en a une ?

Et qu'en est-il du suivant

(2) L'énoncé (2) est faux.

Que se passe-t-il si l'on tente de lui assigner une valeur de vérité déterminée, le vrai ou le faux ?

Que l'on soit ou non convaincu par ces différentes raisons qu'un philosophe peut invoquer pour remettre en question le principe de bivalence, admettons qu'on se propose de définir une sémantique à trois valeurs, qu'on notera V(vrai), F(faux) et N (neutre). On fait ici comme si l'absence de valeur de vérité pouvait être assimilée à une troisième valeur

de vérité noté N, notre problème, dans le cas de langage l0, est alors de définir l'interprétation de connecteurs propositionnels dans une sémantique trivalente.
Admettons tout d'abord que ces connecteurs restent verifonctionnelles, réfléchissons au cas de la conjonction. Notre problème est de déterminer la valeur de (p ∧ q) en fonction de la valeur de p et de la valeur de q. Comme chacune de ces deux lettres peut prendre trois valeurs, il ya en tout deux possibilités. Notre problème revient donc à compléter le tableau suivant :

P	q	(p ∧ q)
V	V	
V	F	
V	N	
F	V	
F	F	
F	N	
N	V	
N	F	
N	N	

Que l'on peut avantageusement remplacer par une table à deux entrées (dans ce qui suit, nous donnerons les deux représentations) :

(p ∧ q)	V	N	F
V			
N			
F			

Il semble assez naturel de conserver la même valeur qu'en logique bivalente pour les cas où les valeurs de p et de q sont V ou F, et donc de commencer à remplir le tableau ainsi

p	q	(p ∧ q)	
V	V	V	
V	F	F	
V	N		
F			V
F			F
F			N
N			V
N			F
N	N		

(p ∧ q)	V	N	F
V	V		F
N			
F	F		F

Mais comment compléter le tableau? La réponse dépend de la signification que l'on entend donner à la valeur N. On considérera ici seulement deux cas à à titre d'exemples, qu'on distinguera en adoptant les notations ∧1 et ∧2.

Première interprétation de N

Selon une première interprétation, on donne à un énoncé la valeur N lorsqu'on ne connaît pas sa valeur de vérité (qu'on suppose néanmoins être V ou F) ou qu'elle est indéterminée. On complètera la troisième ligne (du tableau de gauche) par N (car (p ∧1 q) aura la valeur V si celle de q est V, mais la valeur F si celle de q est F) la sixième ligne par F, car (p ∧1 q) aura la valeur F que q prenne la valeur V ou la valeur F). Pour des raisons

similaires, on complète la septième ligne par N et la huitième ligne par F. Dans le cas ou p et q sont l'un et l'autre N, (p ∧1 q) sera N et l'on obtient :

p	q	(p ∧1 q)
V	V	V
V	F	F
V	N	N
F	V	F
F	F	F
F	N	F
N	V	N
N	F	F
N	N	N

(p ∧1 q)	V	N	F
V	V	N	F
N	N	N	F
F	F	F	F

Second interprétation de N
Imaginons maintenant le cas ou N n'exprime pas notre ignorance de la valeur de vérité (V ou F) d'un énoncé ou son indétermination, mais le fait que l'énoncé n'as pas du tout de valeur de vérité. On donnera par exemple la valeur N à un énoncé qui est dépourvu de sens. Dans ce ca, comme la conjonction de n'importe quel énoncé avec un énoncé dépourvu de sens est elle-emme dépourvue de sens , on obtient une table de vérité différente 1 :

p	q	(p ∧2 q)
V	V	V
V	F	F
V	N	N
F	V	F
F	F	F
F	N	N
N	V	N
N	F	N
N	N	N

(p ∧2 q)	V	N	F
V	V	N	F
N	N	N	N
F	F	N	F

Cas de la négation
Examinons maintenant le cas de la négation. Dans les deux cas précédemment considérés (énoncé dont on ne connaît pas la valeur de vérité, ou énoncé qui n'a pas de valeur de vérité), il semble assez naturel de compléter ainsi la table de vérité (on conscient de noter - p cette interprétation de la négation de p en logique trivalente 1)

p	-p
V	F
F	V
N	N

Pourtant, il est possible en logique trivalente, de donner une autre interprétation de la négation. Par exemple, si “non p” signifie : p n'est pas

vrai. Dans ce cas, si p prend la valeur N, il ne prend pas la valeur V, et non-p prendra donc la valeur V. Si l'on convient de noter p- cette interprétation de la négation de p en logique trivalente, on obtient :

p	p-
V	F
F	V
N	V

Si l'on considère que les énoncés d'un langage L sont vrais, faux, ou de valeur de vérité indéterminée, la formule p- est vraie non pas seulement si p est faux, mais également si p n'est pas vrai. Par conséquent, p- est vrai si, et seulement si, p est soit faux soit de valeur de vérité indéterminée. Cette table de vérité définit la négation forte en logique trivalente.

Note : 1. La première interprétation est celle de la logique trivalente forte de Kleene, la seconde celle de la logique trivalente faible de Kleene, ou logique de Bochvar.
Kleene , Stephen Cole , 1909- Mathematical logic / Stephen Cole Kleene . p . cm . Originally published : New York : Wiley , 1967 . Includes bibliographical references and index . ISBN 0-486-42533-9 (pbk .) 1. Mathematics - Philosophy . 2
Exercice 4.4
Dresser les deux tables de vérité correspondantes pour la disjonction : ∨1 et ∨1
On pourra également se demander ce qui se passe pour l'implication et l'équivalence dans chacune des deux cas

Note : 2. Cette interprétation de la négation est adoptée dans les logiques trivalentes forte et faible de kleene.

thr.1.4. Satisfaction of Function of the 3

valued logic

La Logique Polyvalente est complexe. Il y a encore sur la relation de satisfaction entre des individus et des formules (dans le cas du langage L1). D'autres méthodes s'écartent de cette approche classique par exemple en renonçant au principe de bivalence. En 1920 le philosophe et logicien polonais Jan Lukasiewics (1978-1956) fut l'un des premiers à proposer une sémantique à trois valeurs de verité Cf. Jan Lukasiewicz, Ecrits logiques et philosophiques, Paris, Vrin, 2013. Lui-même et d'autres logiciens ont également développé des sémantiques à plus de trois valeurs de vérité suivi par le formalisme du logicien américain S. Cole Kleene. Ici le formalisme de la logique "polyvalente" étudié est celui de Kleene. S. Cole Kleene est connu pour avoir fondé la branche de la logique mathématique qui porte le nom de théorie de la récursion, en collaboration avec notamment Alonzo Church, Kurt Gödel, Emil Post et Alan Turing, et aussi le lambda-calcul avec Alonzo Church et John Barkley Rosser et une branche de la logique "trivalente" avec "N" valuation. On parle généralement de logique plurivalente lorsque l'interprétation d'un langage logique admet plus de deux valeurs de vérité. Les logiques trivalentes montrent qu'il existe en fait d'autres possibilités que la sémantique classique à deux valeurs pour l'interprétation des constantes logiques de L0 et de L1.

thr.1.5. Usage of classic Function of the 2 valued logic

1. "Ne pas". La négation

L'énoncé "Juliette n'est pas venue" n'est pas élémentaire : il peut être considéré comme construit à partir de l'énoncé plus simple "Juliette est venue" auquel est appliqué une négation exprimée par l'expression "ne pas". Si p représente "Juliette est venue" la forme logique de "Juliette n'est pas venue" est alors non p. On indique ainsi l'opération logique de la - négation est appliqué à l'énoncé p. Comment définir cette opération?
D'après le principe de bivalence, tout énoncé est vrai ou faux. Pour définir l'opérateur logique de la négation, nous posons que son effet est d'inverser la valeur de vérité de l'énoncé auquel il est appliqué :
- Si p est vrai, non p est faux ;
- Si p est faux, non p est vrai.

Plusieurs expressions peuvent servir à exprimer la négation en français : " ne pas", "non", "ne plus" etc. Dans les langages L0 et L1, nous utiliserons la notation "--" pour la négation. La notation L0 et L1, représente naturellement pour L0, la logique de proposition et pour L1, la logique des prédicats. Si le signe p représente un énoncé quelconque,
–p
Se lit "négation de p" ou "non p"
La négation est définie par le tableau suivant

p	–p
V	F
F	V

Dans ce tableau, V et F représentent les deux valeurs de vérité : vrai et faux Ce tableau est la "table de vérité" qui définit la négation logique.
Il convient de faire attention au fait qu'une négation grammaticale

n’exprime pas toujours une négation au sens logique. Par exemple :
1. Certains philosophes sont musiciens
2. Certains philosophes ne sont pas musiciens

La seconde phrase est la négation de la première, mais n’en est pas la négation logique, car les deux phrases sont vraies. La négation logique de la première est “aucun philosophe n’est musicien”. De même dans l'exemple suivant, la seconde phase n’est pas la négation logique de la première, car l’une et l’autres sont fausses :
1. Tous les philosophes sont musiciens
2. Aucun philosophe n’est musicien.

La négation logique de la première est - certains philosophes ne sont pas musiciens”.

2. “Et”. La conjonction

La conjonction de coordination “et” permet de lier l’un à l’autre deux énoncés pour en former un troisième. Si p et q représentent respectivement les deux énoncés suivants :

p : la Terre est une planète ;
q : la Lune est un satellite de la Terre

L’expression “p et q” représente symboliquement l’énoncé “ la Terre est une planète et la lune est une satellite de la Terre.”
L’opérateur logique qui correspond à cet usage de la conjonction de coordination “et” est la conjonction. Comme il lie l’un à l’autre deux énoncés dit qu’il s’agit d’un connecteur propositionnel binaire. La négation, qui s’applique à un seul énoncé, est un connecteur propositionnel unaire.
Dans les langages L0 et L1, on utilisera le signe “∧” pour la conjonction logique. Si p et q sont deux énoncés quelconques, la notation :

$(p \wedge q)$

Se lit : “p conjonction q”, ou “p et q”.
La conjonction se définit par les valeurs de vérité de $(p \wedge q)$, en fonction des valeurs de vérité de p et de q. Comme p et q peuvent l’un et l'autre prendre deux valeurs de vérité, quatre possibilités se présentent :
- P est vrai et q est vrai ;
- p est vrai et q est faux
- p est faux et q est vrai ;
- p est faux et q est q est faux.

Comment compléter le tableau suivant, dans lequel chacune de ces quatre possibilités est représentée sur une ligne distincte ?

p	q	$(p \wedge q)$
V	V	
V	F	
F		V
F	F	

Le sens usuel du mot “été conduit à donner la valeur -vrai à “p et q” dans un cas et un seul: lorsque p est vrai et q est vrai, la conjonction logique est pour cette raison définie par la table de vérité suivante :

p	q	$p \wedge q$	
V	V	V	: ligne 1
V		F	F

F V F
F F F

Selon cette table, (p∧q) prend la valeur vrai dans un cas et un seul, lorsque p et q prennent la valeur vrai (ligne1)

thr.1.5. Chap.1.

2. “Et”. La conjonction et la transcription de “et”, “mais” ou “bien que” par “∧”

Considérons maintenant l’énoncé suivant :
Ex : Suzanne lit un roman bien que la lecture l’ennuie.

Deux énoncés élémentaires (“Suzanne lit un roman” et “la lecture d’ennuie”) sont liés l’un à l’autre par l’expression “bien que”. Peut-on déterminer la valeur de vérité de l’énoncé composé en fonction de celles des deux énoncés élémentaires? Le sens de l’expression “bien que” conduit à dire que l’énoncé composé est vrai dans un cas et un seul : lorsque Suzanne lit effectivement un roman et que la lecture l’ennuie. On voit que la conjonction logique, définie par la table de vérité précédente, correspond aussi bien à “bien que” qu’à “et”.
La même remarque vaut pour l’énoncé suivant, qui résulte du précédent lorsqu’on remplace “bien que “ par
“mais” :
Ex : Suzanne lit un roman -mais la lecture l'ennuie.

La transcription de “et”, “mais” ou “bien que” par “∧” efface les nuances qui existent en francais entre ces expressions pour ne retenir que le contenu de la table de vérité de la conjonction.

“Et”, “mais” et “bien que” peuvent lier des noms (“Oscar et Violette rient”), des verbes (“il plie mais ne rompt pas”), des adjectifs (“la décision est légitime bien qu’illégale”), etc. Dans le langage L0, la conjonction lie toujours des propositions. Pour être transcrites dans L0, les phrases précédentes demandent donc à être interprétées :
- Oscar rit et Violette rit.
- Il plie mais il ne rompt pas.
- La décision est légitime bien qu’elle soit illégale.

Une telle interprétation n’est cependant pas toujours possible, comme le montrent les exemples suivants :
- Jules et Jim se querellent.
- Plic et Ploc ont soulevé le piano.
- Certains restaurants sont excellents bien que peu onéreux.

pour lesquels aucune transformation similaire ne permettrait de conserver le sens des énoncés initiaux. Il va de soi qu’on ne transcrit pas non plus par une conjonction le “et” qui figure dans une phrase comme “tu fais un pas de plus que je crie”.

Exercice 1.
On peut s'exercer de choisir une lettre de proposition pour représenter les propositions élémentaires l’énoncé “Otto deviendra philosophe ou il

entrera dans les ordres.” et montrer quelle est sa forme logique. Même question pour “Cette fleur est bleue ou verte” . Telle est une disjonction.

3. “Ou”. La disjonction.

Le mot de liaison “ou” (grammaticalement, il s’agit d’une conjonction de coordination) figure dans l’exemple suivant :
Ex : Otto deviendra philosophe ou il entrera dans les ordres.

Cet énoncé peut être interprété comme étant composé de deux énoncés complémentaires que nous représentons par les lettres p et q :

p : Otto deviendra philosophe.
q : Otto entrera dans les ordres

Le mot “ou”, dans l’exemple, est l’ expression usuelle d’un connecteur propositionnel binaire appelé - disjonction, défini, comme la conjonction, par une table de vérité. Pour que l’énoncé donné soit vrai, il suffit que l’un ou l’autre des deux énoncés élémentaires qui le composent soit vrai, sans exclure qu’ils puissent être l’un et l’autre vrais. Les interprétations de p et de q qui rendent l’expression symbolique “p ou q” fausse sont donc celles, et seulement celles qui rendent p faux et q faux. On utilise la notation suivante :

$(p \vee q)$
Qui se lit “p disjonction q” ou encore “p ou q”.

Des remarqus qui précèdent, on tire la table de vérité de la disjonction

P	q	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il arrive que le mot “ou” ait un sens différent, et que l’on donne à la proposition composée la valeur F, faux dans le cas ou p et q prennent l’un et l’autre la valeur V, vrai. On dit alors que le “ou” est compris au sens - exclusif : l’un ou l’autre mais pas les deux à la fois. Les connecteurs logiques que nous connaissons nous permettent d’exprimer cela de la manière suivante :

p ou q, mais non (p et q).

L’expression du ou exclusif est donc possible de la manière suivante :

$((p \vee q) \wedge - (p \wedge q))$.

EN français, “ ou bien…ou bien…” et “soit….soit…” ont tantôt le sens de la disjonction inclusive tantôt le sens de la disjonction exclusive. En pratique, dans les transcriptions, on utilisera rarement la disjonction exclusive.
On se gardera de transcrire aveuglement “ou” par une disjonction. Un énoncé comme “Thibaud ou Zoé peuvent aller poster la lettre” signifie en effet plutôt “ Thibaud peut aller poster la lettre et Zoé peut aller poster la lettre”.

thr.1.5. Chap.2.

4. “Si…alors…”. L’implication matérielle.

L’analyse de l’expression “si…alors…” est beaucoup plus délicate. Au IV” siècle avant notre ère, Diodore Cronos et son élève Philon, deux philosophes logiciens de l’école de Mégare, s’opposaient déjà sur l'interprétation des énoncés dans lesquels figurent l’expression grecque correspondante, et ils percevaient parfaitement les enjeux philosophiques de cette question. Noter que. Diodore Cronos et Philon s’intéressèrent également aux paradoxes logiques et logiques modal. Leurs idées influencèrent la logique des Stoïciens et sont encore une source d’inspiration pour les logiciens contemporains. La célèbre Argument dominateur, du à Diodor de Cronos, a inspiré certains des travaux du logicien Arthur Prior (1914-1969) sur la logique. Une première difficulté tient à ce qu’une expression de la forme “si p alors q” (ou p et q sont des énoncés quelconques) peut avoir des usages et des sens très différents, dont la valeur de vérité n’est pas nécessairement fonction des valeurs de vérité de p et de q ; il n’est même pas évident qu’une telle expression ait toujours une valeur de vérité.

Considérons les exemples suivants de phrases hypothétiques :

Ex 1 : Si Oswald n'avait pas assassiné Kennedy, un autre l’aurait fait.
Ex 2 : Si Oswald n’a pas assassiné Kennedy, un autre l’a fait.
Ex 3 : Si elle prépare bien sa campagne, elle gagnera les élections.
Ex 4 : Si un corps est en chute libre, son mouvement est uniformément accéléré.
Ex 5 : Si elle se déplace, il la suit.
Ex 6 : Si la Terre était en mouvement, les objets ne tomberaient pas verticalement.

Dans le premier exemple, la supposition exprime une situation fictive concernant le passé (un - irréel du passé, ou “contrefactuel”) et la proposition principale un scénario imaginaire. Dans la seconde, la supposition sert à formuler une hypothèse concernant un événement passé, et la proposition principale exprime une conséquence de cette hypothèse. Dans la troisième, la proposition subordonnée donne une condition pour qu’un événement ait lieu. La quatrième est une loi de la nature. Dans la cinquième, la conjonction”si” a le sens de “toutes les fois que”. Dans le sixième, la supposition exprime une hypothèse que l’auteur de l’affirmation croit fausse.

On ne peut pas raisonnablement espérer parvenir à une analyse logique satisfaisante de l’expression “si…alors…” applicable de manière uniforme de tous ces cas. La question d’une analyse logique de ces différents exemples.

Il est en fait assez complexe ces exemples et nous ne chercherons pas à les résoudre. Noter que. la logique des conditionnels constitue à elle seule tout un domaine d’étude dans lequel on distingue généralement plusieurs catégories de phrases hypothétiques (ou “conditionnelles”), pour lesquelles diverses théories ont été proposées.

– Dans le langage L0 que nous allons définir, nous introduisons un connecteur qu’on nommera “implication matérielle” (ou, plus brièvement, “implication”), que nous noterons “⇒” et qui correspond à certains usages de l’expression “si…alors…”, ainsi qu’à certaines autres expression (“...seulement si…”, “ il suffit que…pour que…”, etc.). Nous examinons maintenant quelques exemples d’énoncés afin de préciser à quels usages de la langue usuelle correspond ce connecteur.

Considérons l'exemple suivant :

Ex : Si Léa va au Japon, elle apprendra le japonais.

Soient p et q deux lettres qui représentent, respectivement, les énoncés suivants :

p : Léa ira au Japon.
q : Léa apprendra le japonais.

L'énoncé de l'exemple peut alors être représenté ainsi :

si p alors q.

Si l'énoncé est vrai, ce qui est exclu est que Léa aille au Japon (p) et qu'elle n'apprenne pas le japonais (non q). Autrement dit, si l'énoncé est vrai, ce qui est exclu est que p soit vrai et que q soit faux. En revanche, l'énoncé ne dit rien du cas où Léa ne va pas au Japon (elle pourrait, dans ce cas, apprendre ou ne pas apprendre le japonais). "Si p alors q" exclut donc seulement le cas ou p est vrai et q est faux. Ou encore : "si p alors q" n'est faux que si p est vrai et q est faux. Cette analyse suggère de définir le connecteur de l'implication matérielle par la table de vérité suivante :

p	q	$(p \Rightarrow q)$	(ligne 4)
V	V	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	F	V	

ou $(p \Rightarrow q)$ prend la valeur

- Vrai si p est faux ou q est vrai (lignes 1,3 et 4)
- Faux si p est vrai et q est faux (ligne 2).

La formule "$(p \Rightarrow q)$" se lit "p implication q", ou "p implique q", ou encore "q flèche q". L'expression qui se trouve à gauche de la flèche est appelée – l'antécédent ; celle qui se trouve à droite de la flèche, – le conséquent.

thr.1.5. Chap.3.

Bien que le nom – implication soit d'usage courant pour ce connecteur, il faut souligner que cette appellation prête à confusion en suggérant à tort que le conséquent serait "impliqué" par l'antécédent. Or selon l'interprétation qu'on en a donnée, seules les valeurs de vérité de p et de q déterminent la valeur de vérité de $(p \Rightarrow q)$, et rien n'est dit, par exemple, d'un quelconque lien de signification qui pourrait exister entre p et q.

La plupart des usages courants de "si…alors…" disent ou sous-entendent plus que ce qui est exprimé par "$\Rightarrow$". Par exemple, dans l'énoncé :

Si la Terre tourne, alors Galilée a raison.

On sous-entend aussi que - si la Terre ne tourne pas, alors Galilée a tort (à comparer avec la promesse : "Si tu réussis, tu auras une récompense.", qui sous-entend le plus souvent qu'aucune récompense ne sera attribuée en cas d'échec). En pratique, lorsque nous trouverons une expression de la forme "si p alors q" dans une inférence, nous ne supposerons pas qu'il est

sous-entendu que si non p alors non q.
L'usage de l'implication pour transcrire l'expression " si...alors..." soulève également d'autres difficultés. Considérons l'exemple suivant :

Ex : Si 2+2=5, alors la Lune est verte.

Cet énoncé est de la forme si p alors q, ou p et q sont deux lettres qui peuvent servir à représenter, respectivement :
p : 2+2=5
q : la Lune est verte

Si nous transcrivons l'énoncé par
(p⇒q)

La table de vérité de l'implication (ligne 4), nous indique que (p⇒q) est vrai, car p et q sont l'un et l'autre – faux. Nous sommes ici en présence d'un exemple de ce que l'on appelle "les paradoxes de l'implication".

Le connecteur de l'implication ne retient qu'un sens bien précis de l'ex-pression "si… alors", à savoir : – on n'a pas à la fois p et non q, ou encore – on ne pas p vrai et q faux. De fait, on n'a pas à la fois "2+2=5" vrai et "La Lune est verte" faux puisque "2+2=5" est faux; que p et q n'aient pas de rapport signification ne détermine pas la valeur de vérité de (p⇒q).

Dans l'analyse d'une inférence, la transcription de "si p alors q" l'implication n'est légitime que si l'énoncé exprime bien "on n'a pas à la p et non q", et que la validité de l'inférence ne dépend pas d'un autre ce conditionnel "si...alors...". Noter que. En anglais, ce connecteur est souvent appelé "conditionnel" (conditional).

Considérons maintenant l'exemple suivant :

Ex : Roger a le droit de voter seulement s'il a plus de dix-huit ans.

Cette proposition signifie qu'une condition nécessaire pour que Roger ait le droit de voter est qu'il ait plus de dix-huit ans. Les énoncés suivants sont équivalents au précédent :

- Pour que Roger ait le droit de voter, il faut qu'il ait plus de dix-huit ans.
- Il est faux que Roger ait le droit de voter sans avoir dix-huit ans.
- Il est faux que Roger ait le droit de voter et qu'il n'ait pas dix-huit ans.

Soient p et q deux lettres qui peuvent servir à représenter :

p : Roger a le droit de voter
q : Roger a plus de dix-huit ans.

L'énoncé de l'exemple a la forme logique suivante :
Il est faux que : p et non q.

Par conséquent, il se transcrit en utilisant l'implication :
(p⇒q)

Chacun des énoncés suivants se transcrit par (p⇒q) :

- Roger a le droit de voter seulement s'il a plus de dix-huit ans.
- Pour que Roger ait le droit de voter, il est nécessaire qu'il ait plus de dix-huit ans.
- Pour que Roger ait le droit de voter, il faut qu'il ait plus de dix-huit ans.

Ici, il n'est pas dit qu'il suffit que Roger ait plus de dix-huit ans pour qu'il ait le droit de voter. Le droit de voter peut très bien supposer que Roger satisfasse d'autres conditions (ne pas avoir été déchu de ses droits civiques, etc.).

Dire qu'il suffit que Roger ait plus de dix-huit ans pour avoir le droit de voter, cela revient à dire, de manière équivalente :
- Que Roger ait plus de dix-huit ans est une - condition suffisante pour qu'il ait le droit de voter.
- Pour que Roger ait le droit de voter, il suffit qu'il ait plus de dix-huit ans.
- Si Roger a plus de dix-huit ans, alors il a le droit de voter.

La transcription de chacune de ces expressions est donc la suivante : $(q \Rightarrow p)$

thr.1.5. Chap.4.

5. "Si et seulement si". L'équivalence matérielle.

Supposons maintenant que nous voulions exprimer :

P seulement si q et si q alors p.

Autrement dit :

p seulement si q, et p si q.

Au vu de ce qui précède, cela peut se dire aussi bien en utilisant l'une quel-conque des formulations suivantes :
- q est condition nécessaire de p et q est condition suffisante de p.
- q est condition nécessaire et suffisante de p.
- Pour que p il faut que q et pour que p il suffit que q.
- Pour que p il faut et il suffit que q.
- P seulement si q, et p si q.
- p si, et seulement si, q.

Pour exprimer cela, on utilise la formule $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ ou le connecteur binaire appelé - équivalence, pour lequel il est naturel d'utiliser la notation :
$(p \Leftrightarrow q)$
Qui se lit "p équivalence q". Ce connecteur est défini par la table de vérité :

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On voit que $(p \Leftrightarrow q)$ prend la valeur - vrai si, et seulement si, p et q ont la même valeur de vérité. Que $(p \Leftrightarrow q)$ soit vrai ne suppose pas que p et q aient la même signification ; p et q peuvent même représenter des propositions qui n'ont au-cun rapport du point de vue de

leur signification. Pour indiquer ce sens très particulier du mot “équivalence”, on parle quelquefois - d’équivalence matérielle.

Le tableau suivant récapitule les définitions des quatre connecteurs propositionnels binaires qui ont été expliqués :

p	q	(p∧q)	(p∨q)	(p⇒q)	(p⇔q)
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Dans ce tableau, on donne le sens des propositions composés (p∧q), (p∨q), etc.) en donnant leurs conditions de vérité. Certains philosophes défendent l’idée générale selon laquelle le sens d’une proposition est donnée par ses - conditions de vérité, ce qui suppose qu’on dispose d’un concept de vérité qui ne dépend pas lui-même du sens des propositions.

thr.1.6. Usage of isomorph Function of the 3 valued logic

1. Le langage de L0 “trivalent”

La méthode d’interprétation des langages formels que nous avons présentée est une sémantique classique, fondée sur l’attribution d’une valeur vérité (V, vrai ou F, faux) à chaque lettre de proposition (les valuations du langage L0)
-
Il y a encore sur la relation de satisfaction entre des individus et des formules (dans le cas du langage L1). D’autres méthodes s’écartent de cette approche classique par exemple en renonçant au principe de bivalence. En 1920 le philosophe et logicien polonais Jan Lukasiewics (1978-1956) fut l’un des premiers à proposer une sémantique à trois valeurs de verité Cf. Jan Lukasiewicz, Ecrits logiques et philosophiques, Paris, Vrin, 2013. Lui-même et d’autres logiciens ont également développé des sémantiques à plus de trois valeurs de vérité suivi par le formalisme du logicien américain S. Cole Kleene. Ici le formalisme de la logique “polyvalente” étudié est celui de Kleene. S. Cole Kleene est connu pour avoir fondé la branche de la logique mathématique qui porte le nom de théorie de la récursion, en collaboration avec notamment Alonzo Church, Kurt Gödel, Emil Post et Alan Turing, et aussi le lambda-calcul avec Alonzo Church et John Barkley Rosser et une branche de la logique “trivalente” avec “N” valuation. On parle généralement de logique plurivalente lorsque l'interprétation d’un langage logique admet plus de deux valeurs de vérité. Les logiques trivalentes montrent qu’il existe en fait d’autres possibilités que la sémantique classique à deux valeurs pour l'interprétation des constantes logiques de L0 et de L1.
Mais pourquoi vouloir renoncer au principe de bivalence? On peut estimer que certains énoncés n’ont pas de valeur de vérité, ou la valeur qu’il convient de leur attribuer n’est ni le vrai ni le faux. Nous indiquons ici seulement quelques-unes des raisons que des philosophes ont pu invoquer pour s’engager dans la direction d’une logique plurivalente.
1. Reconsidérons en détails les phrases suivante déjà introduite pour le saisir:
D’incolores idées vertes dorment furieusement.

Noter que : Colorless green ideas sleep furiously (en français D'incolores idées vertes dorment furieusement) est une phrase proposée par Noam Chomsky dans son livre de 1957 Syntactic Structures comme exemple d'une phrase grammaticalement correcte, mais sémantiquement absurde.
- Les prédicats vagues ont donné l'occasion de célèbres paradoxes logiques, nommés "sorites", connus depuis l'Antiquité (Eubulide de Milet en formule une version au IVe siècle avant J.C.) et encore très discuté aujourd'hui. Le mot "sorite" vient du terme grec "sofos" qui signifie précisément "tas". Cf. Jan Lukasiewicz, Ecrits logiques et philosophiques, Paris, Vrin, 2013, p.309.

Elle est grammaticalement irréprochable bien que son sens, si elle en a un, ne permette pas d'affirmer qu'elle est vraie ou fausse. Faut-il en conclure qu'elle n'est ni vraie ni fausse et qu'elle remet en question le principe de bivalence? Selon une autre analyse, il s'agit d'une phrase que l'on peut traiter de la façon suivante :
Il n'est pas un énoncé, au sens où elle n'exprime aucune proposition.

2. Reconsidérons encore d'autres phrases suivantes :

Le nombre des galets de la plage d'Etretat est impair. Ici, la difficulté est que le nombre de galets de la plage d'Etretat est mal défini, pas assez précisément, en tout cas, pour qu'on puisse affirmer qu'il est , de manière déterminée, pair ou impair (quelle est la taille limite au-delà de laquelle une concrétion minérale n'est plus un galet mais un grain de sable? Ou s'arrête, exactement, la plage d'Etretat? etc.). Un problème similaire se pose au sujet des prédicats vagues, comme dans les phrases "ceci est rouge" ou "ceci est un tas de sable", dont la valeur de vérité peut être indéterminée dans le cas d'objets à la limite du rouge, ou dans celui d'assemblages de grains de sable à la limite de ce qui mérite le nom de "tas" Et que penser de l'énoncé suivant ?
Une chaise cassée est encore une chaise.
A-t-il une valeur de vérité déterminée ?

-
3. Considérons l'énoncé :

L'actuel roi de France est chauve.

Le problème de cette phrase est qu'elle semble présupposer une proposition fausse (à savoir qu'il existe un actuel roi de France). Faut-il en conclure qu'elle n'a pas de valeur de vérité? Ou qu'elle n'exprime pas une proposition? Selon une autre analyse (celle de Russell) elle signifie en fait qu'il existe actuellement un roi de France et que ce roi est chauve. Il s'agirait donc d'un énoncé faux, et non pas d'une phrase dépourvue de valeur de vérité.
4. Au chapitre 9 de son traité De l'interprétation Aristote, soulève un problème devenu célèbre : celui des futurs contingents. L'énoncé "il y aura demain une bataille navale" est-il de manière déterminé, vrai ou faux aujourd'hui? Si tel est le cas, il semble que nous soyons soumis à un déterminisme implacable, car si l'énoncé est vrai, rien ne pourra nous faire éviter la bataille navale, et s'il est faux, rien ne pourra faire qu'elle ait lieu. Faut-il en conclure au déterminisme? Ou faut-il renoncer au principe de bivalence, et aux raisonnements dans lesquels nous faisons (implicitement ou explicitement) appel à lui?
5. Comment comprendre que tout énoncé soit, de manière déterminée, vrai ou faux, indépendamment de notre capacité à vérifier ce qu'il en est? Y aurait-il un monde, immuable, constitué des propositions vraies (des

propositions pour ainsi dire “vraies en soi”) totalement indépendant de la connaissance que nous pouvons en avoir? Quel serait ce curieux monde, et comment y aurions nous accès? N’est-il pas étranger de supposer qu’il existe ? Et s’il n’existe pas ne faut-il pas admettre que certains énoncés, dont nous ne pouvons pas connaître la valeur de vérité, ne sont ni vrais ni faux?

6. Considérons l’énoncé suivant :

(1) L’énoncé (1) est vrai.

Cet énoncé est-il, de manière déterminée, vrai ou faux ? Comment justifier sa valeur de vérité, s’il en a une ?

Et qu’en est-il du suivant

(2) L'énoncé (2) est faux.

Que se passe-t-il si l’on tente de lui assigner une valeur de vérité déterminée, le vrai ou le faux ?

Que l’on soit ou non convaincu par ces différentes raisons qu’un philosophe peut invoquer pour remettre en question le principe de bivalence, admettons qu’on se propose de définir une sémantique à trois valeurs, qu’on notera V(vrai), F(faux) et N (neutre). On fait ici comme si l’absence de valeur de vérité est traité de la façon suivante :

-

L’absence de valeur de Vérité pouvait être assimilée à une troisième valeur de vérité noté “N”, notre problème, dans le cas de langage L0, est alors de définir l’interprétation de connecteurs propositionnels dans une sémantique trivalente.

Admettons tout d’abord que ces connecteurs restent très fonctionnels, réfléchissons au cas de la conjonction. Notre problème est de déterminer la valeur de $(p \wedge q)$ en fonction de la valeur de p et de la valeur de q. Comme chacune de ces deux lettres peut prendre trois valeurs, il ya en tout deux possibilités. Notre problème revient donc à compléter le tableau suivant :

P	q	$(p \wedge q)$
V	V	
V	F	
V	N	
F	V	
F	F	
F	N	
N	V	
N	F	
N	N	

Que l’on peut avantageusement remplacer par une table à deux entrées (dans ce qui suit, nous donnerons les deux représentations) :

$(p \wedge q)$	V	N	F
V			
N			
F			

Il semble assez naturel de conserver la même valeur qu’en logique bivalente pour les cas où les valeurs de p et de q sont V ou F, et donc de commencer à remplir le tableau ainsi

p	q	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
V	N	
F	V	
F	F	
F	N	
N	V	
N	F	

N N

(p ∧ q) V N F
V V F
N
F F F

Mais comment compléter le tableau? La réponse dépend de la signification que l'on entend donner à la valeur N. On considérera ici seulement deux cas à titre d'exemples, qu'on distinguera en adoptant les notations ∧1 et ∧2.

On peut introduire ici la distinction entre logique forte et faible de Kleene :

2. Première interprétation de N

Cette interprétation est dite "Forte". Selon une première interprétation, on donne à un énoncé la valeur "N" lorsqu'on ne connaît pas sa valeur de vérité (qu'on suppose néanmoins être V ou F) ou qu'elle est indéterminée. On complètera la troisième ligne (du tableau de gauche) par N (car (p ∧1 q) aura la valeur V si celle de q est V, mais la valeur F si celle de q est F) la sixième ligne par F, car (p ∧1 q) aura la valeur F que q prend la valeur V ou la valeur F). Pour des raisons similaires, on complète la septième ligne par N et la huitième ligne par F. Dans le cas ou p et q sont l'un et l'autre N, (p ∧1 q) sera N et l'on obtient :

p q (p ∧1 q) fort (vu)
V V V
V F F
V N N
F V F
F F F
F N F
N V N
N F F
N N N

(p ∧1 q)	V	N	F
V	V	N	F
N	N	N	F
F	F	F	F

3. Second interprétation de N
Cette interprétation est dite "Faible". Imaginons maintenant le cas ou N n'exprime pas notre ignorance de la valeur de vérité (V ou F) d'un énoncé ou son indétermination, mais le fait que l'énoncé n'ait pas du tout de valeur de vérité. On donnera par exemple la valeur N à un énoncé qui est dépourvu de sens. Dans ce cas, comme la conjonction de n'importe quel énoncé avec un énoncé dépourvu de sens est elle-emme dépourvue de sens , on obtient une table de vérité differente :

p q (p ∧2 q) faible (vu)
V V V
V F F
V N N
F V F
F F F
F N N

N V N
N F N
N N N

$(p \wedge_2 q)$ V N F
V V N F
N N N N
F F N F

Noter que. La première interprétation est celle de la logique trivalente forte de Kleene, la seconde celle de la logique trivalente faible de Kleene, ou logique de Bochvar.

Exercice 4
On peut s'exercer ainsi à dresser les deux tables de vérité correspondantes pour la disjonction : $\vee 1$ et $\vee 2$
On pourra également se demander ce qui se passe pour l'implication et l'équivalence dans chacune des deux cas ainsi dans les pages suivantes :

4. "Ne pas". Cas de la négation de "Kleene"

Examinons maintenant le cas de la négation. Dans les deux cas précédemment considérés (énoncé dont on ne connaît pas la valeur de vérité, ou énoncé qui n'a pas de valeur de vérité), il semble assez naturel de compléter ainsi la table de vérité (on conscient de noter –p cette interprétation de la négation de p en logique trivalente.) Noter que. Cette interprétation de la négation est adoptée dans les logiques trivalentes forte et faible de kleene :

p	–p	faible (vu)
V	F	
F	V	
N	N	

Pourtant, il est possible en logique trivalente, de donner une autre interprétation de la négation. Par exemple, si "non p" signifie : p n'est pas vrai. Dans ce cas, si p prend la valeur N, il ne prend pas la valeur V, et non–p prendra donc la valeur V. Si l'on convient de noter –p cette interprétation de la négation de p en logique trivalente, on obtient :

p	–p	fort (vu)
V	F	
F	V	
N	V	

Si l'on considère que les énoncés d'un langage L0, ou L1 sont vrais, faux, ou de valeur de vérité indéterminée, la formule p- est vraie non pas seulement si p est faux, mais également si p n'est pas vrai. Par conséquent, p- est vrai si, et seulement si, p est soit faux soit de valeur de vérité indéterminée. Cette table de vérité définit la négation "forte" en logique trivalente.

Matrice or trough table

Vérité logique et Contradiction

5. "Si et seulement si". L'équivalence matérielle trivalente de "Kleene"

Le tableau suivant du 6. donne et récapitule les valuations de L'équivalence matérielle et des quatre connecteurs propositionnels "trivalents" qui vont être expliqués :

6. $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Le connecteur matériel de "Kleene"

Voici le tableau suivant récapitule les valuations des quatre connecteurs propositionnels binaires et trivalents qui ont été expliqués :
Voici, le connecteur binaire

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V
N					

Voici , le trivalent fort

p	q	$(p \wedge 1q)$	$(p \vee 1q)$	$(p \Rightarrow 1q)$	$(p \Leftrightarrow 1q)$ (vu)
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
V	N	N	N	N	N
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V
F	N	F	V	V	F
N	V	N	N	N	N
N	F	F	V	F	F
N	N	N	N	N	N

Voici , le trivalent faible

p	q	$(p \wedge 2q)$	$(p \vee 2q)$	$(p \Rightarrow 2q)$	$(p \Leftrightarrow 2q)$ (vu)
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
V	N	N	N	N	N
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V
F	N	N	N	N	N
N	V	N	N	N	N
N	F	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N

Dans ces deux tableaux trivalentes aussi, on donne le sens des propositions composées ($(p \wedge 1,2q)$, $(p \vee 1,2q)$, etc.) en donnant leurs conditions de vérité. Certains philosophes ici ne défendent l'idée générale selon laquelle le sens d'une proposition "trivalente" est donnée par ses - conditions de vérité, ce qui ne suppose donc pas qu'on dispose d'un concept de vérité qui ne dépend pas lui-même du sens des propositions.

7. $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. ou Les signes primitifs "trivalents"

Nous définissons maintenant le langage formel de L0 "trivalent" pour la formalisation des inférences "trivalentes" fortes et faibles. Il s'agit des inférences dans lesquelles les éléments de base sont des énoncés ou des - propositions "trivalentes" élémentaires, représentées par des signes comme p,q, etc. On définit d'abord le vocabulaire du langage (l'ensemble des signes primitifs), puis les règles de syntaxe qui définissent l'ensemble des expressions bien formées qu'on appellera des - formules "trivalentes"

du langage.

On rappelle pour avancer les développements déjà effectués ci-haut, à savoir que l'on distingue trois catégories de signes (on dit aussi "symboles") :

1. Les signes logiques. Il s'agit, pour le langage L0, des connecteurs propositionnels :
(a) La négation : –p
(b) La conjonction : ∧
(c) La disjonction : ∨
(d) L'implication : ⇒
(e) L'équivalence : ⇔
2. Les signes auxiliaires, à savoir les deux parenthèses ")" et "(", qu'on remplace parfois par des crochets pour des raisons de lisibilité des formules "trivalentes" ;

3. Les signes non-logiques. Pour le langage L0 "trivalent", il s'agit d'un nombre illimité de lettres minuscules de l'alphabet romain (éventuellement indicées) : p, q, r, s, t, p1, p2, ...q1, q2, ..., qu'on appelle lettres de proposition, ou parfois atomes ou lettres d'énoncés.

Dans certains langages, on introduit des signes définis à partir d'autres signes. Ce n'est pas le cas de L0 "trivalent", ou tous les signes sont des signes de L0 . Mais par contre c'est le cas de L1 "trivalent", tel il sera exposé ici.
Par ex. (p∧2q) : , (p∨2q) , (p⇒2q) , (p⇔2q) sont des formules correctes de L0 classique et trivalent.

Chapter II.

3-2-valued Logic Truth Table

thr.1.1 Truth Table isomorphism

8. Qu’est-ce qu’une vérité logique ?

- Vérité logique et contradiction

Notre intention est donc d’étudier les formules et théorèmes de L0 et de L1 classique et démontrer s’il reste correctes ou conservés comme tels dans les formules de L0 et de L1 “trivalente” de Kleene.

Par vérité logique, on entend en logique “bivalent” et “trivalent” souvent un énoncé dont la vérité ne dépend pas des faits ou de l’état des choses dans le monde, et qui est donc vrai pour ainsi dire “par lui-même”. “Il pleut”, il est sous-entendu, ici, que cela est dit d’un lieu bien déterminé à un moment déterminé. Un énoncé comme “Il pleut” est vrai ou faux selon qu’il pleut ou il ne pleut pas” est vrai quel que soit le temps qu’il fait, et il est en ce sens, - logiquement vrai. Il est N cad “Neutre” selon les valeurs contraires de “vrai” ou “faux”. D’un point de vue épistémologique, la différence est essentielle puisque, dans l’un ou l’autre cas, les raisons pour lesquelles l’énoncé est vrai ne sont pas du tout du même genre. Les philosophes se sont demandés quelle était la nature des vérités logiques “bivalent”, et de N logique “trivalent”, quel était leur contenu, leur fonction.

-

Et ces questions s’entendent dans le système de nos connaissances, ou encore quelles relations elles ou encore avec d’autres énoncés vrais (notamment les énoncés mathématiques) et il était possible de fonder des connaissances sur des vérités purement logiques. Voici quelques autres exemples de vérités logiques du langage usuel :

- Tous les chats sont des chats.
- S’il fait jour alors il fait jour.
- La planète Vénus est la planète Vénus.
- Si tous les singes sont des mammifères et si Cheeta est un singe, alors Cheeta est un mammifère.
- Est-ce qu’une tautologie “bivalente” a la même valeur et la même formule qu’une tautologie “trivalente”? On le verra à la section relative à la “tautologie” et à la “contradiction”.

Il faut noter qu’il s’agit là pour la proposition “Si tous les singes” , d’un énoncé, dont la forme est “si…alors”, et non d’une - inférence : il n’y a pas de conclusion introduite par “donc” ou “par conséquent”.

Qu’est-ce qui caractérise, de manière générale, une vérité logique? On pourrait être tenté de dire qu’une vérité logique est évidente par elle-même mais il est douteux que cela puisse passer pour une définition, car certains énoncés comme “1+1=2” ou “par deux points distincts passe une droite et une seule”, dont la vérité peut sembler évidente, au moins à première vue, ne sont pas considérés comme des vérités logiques. Et de même l’existence de N valeur ni “vrai” ni “faux” interroge le Tiers-exclu. Différentes hypothèse de caractérisations ont été proposées, dont les suivantes :

- Énoncés dont la vérité est obvie (1) ;
- Énoncés les plus généraux qui soient (2) ;
- Énoncés qui expriment des lois de la pensée (3) ;
- Énoncés vides, au sens où ils ne disent rien, ne nous apprennent rien sur l’état des choses dans le monde ;

- Énoncés vrais en vertu de leur forme et non de ce dont il y est question ;
- Énoncés vrais en vertu de leur signification et non de leur correspondance avec des faits ;
- etc.

Il faut noter que selon cette seconde définition, les énoncés de la logique portent sur tout ce qui est, ou sur tout ce qui peut être pensé, et se distinguent ainsi des énoncés qui portent sur des objets particuliers ou sur un domaine restreint de la réalité, par exemple les énoncés de la zoologie.

Il faut noter pour la troisième définition, que "pensée" non pas au sens de lois empiriques de la psychologie ou des lois qui décrivent la pratique effective des raisonnements mais au sens de règles que l'on respecte nécessairement si l'on pense quoi que ce soit. Cf. Ludwig Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus, aphorismes 5.4731 et ci-dessous, p.282.

Il faut comprendre qu'ici pour la quatrième définition, on se sert de la définition donnée par Ludwig Wittgenstein, Cf. Ludwig Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus, ci-dessous, p.326.

Plutôt que de discuter ces différentes définitions, censées valoir pour des énoncés du langage usuel, nous allons donner des définitions exactes de termes qui s'appliquent aux cas des langages L0 "trivalent" et L1 "trivalent", et qui correspond, pour ces langages formels, à ce qu'on appelle des - vérités logiques du langage usuel : "tautologie" (pour L0 et pour L0 "trivalent" et "formule valide" (pour L1 et pour L1 "trivalent").

Avant cela, notons que les philosophes ont souvent également parlé de - lois ou de - principes logiques. Voici quelques exemples typiques :

1. Principe du tiers exclu : de deux énoncés dont l'un est la négation de l'autre, au moins l'un des deux est vrai 1.
2. Principe de non-contradiction : un énoncé et sa négation ne sont pas l'un et l'autre vrais.
3. Principe de bivalence : tout énoncé est soit vrai soit faux.
4. Principe d'identité : toute chose est identique à elle-même
5. Est-ce que ces principes restent les mêmes si on applique la valeur "trivalente" de N ?

Ces lois ont une fonction essentielle dans de nombreux raisonnements qu'il soit "bivalent" et "trivalent". Par exemple, pour prouver un certain énoncé p, on peut commencer par supposer non–p est faux ou que "n–p" pour dire "Neutre ou N de p c-a-d que n–p est neutre , et prouver qu'une telle hypothèse conduit à une contradiction ; on en déduit alors que pour prendre le cas de non–p, on en déduit que non–p est faux, pour conclure p, en invoquant le principe du tiers-exclu (p ou non–p) car pour juste les valeurs spécifique de (p et non–p) le principe de "bivalence" semble fonctionner de façon classique comme en L0 ou L1 classique. Cette forme de raisonnement est ce qu'on appelle une démonstration par l'absurde, comme Cf. Aristote, Seconds Analytiques, I, chap. 11, 77a22-25. On donne un exemple précis d'un tel raisonnement au chapitre 13, infra, p. 23. Les lois logiques énoncent, sous une forme générale, des principes applicables à des cas particuliers d'énoncés ou d'expressions. Ainsi, "Il pleut ou il ne pleut pas" est un cas d'application du principe du tiers exclu classique ; "on n'a pas à la fois" il pleut et "il ne pleut pas" un cas d'application du principe de non-contradiction, et "la planète Vénus est la planète Vénus" un cas d'application du principe d'identité comme ref. Aristote donne la formulation suivante : "Il n'est pas possible qu'il y ait aucun intermédiaire

entre des énoncés contradictoires ou tautologiques : il faut nécessairement ou affirmer ou nier un seul prédicat, quel qu'il soit, d'un seul sujet" (métaphysique, r , 7 , 1011b23.) On est en train d'évoluer pour voir si la vérification des formules reste la même ou isomorphe si on applique la "N" valeur trivalente.

9. Qu'est-ce qu'une tautologie ?

L' intention ici est donc d'étudier les formules tautologiques de L0 et de L1 classique et démontrer s'il reste correctes ou conservés comme tels donc isomorphe dans les formules de L0 et de L1 "trivalente" de Kleene.

L'idée de base qui conduit à la définition de "tautologie" et de"formule valide" est très simple en L0, L1 classique et un peu complet en L0 et L1 "trivalent" : ces termes de "tautologie" et de "formule valide" désignent des formules qui sont toujours vraies. La seule difficulté est de donner un sens précis à "toujours" surtout en L0 et L1 "trivalent". Difficulté qu'on surmonte un peu : "toujours" signifie ici dans tous les cas, c'est-à-dire : pour toutes les interprétations du langage.

Nous nous servons maintenant de deux affirmations expliqués au chapitre suivant 4 :
1. Pour donner une interprétation de L0 classique et L1 "trivalent", il suffit d'attribuer une valeur de vérité à chaque lettre de proposition (p, q, r, etc.), c'est-à-dire donner une - valuation.

2. La valeur de vérité d'une formule de L0 classique et L0 "trivalent" est entièrement déterminée par la valeur de vérité des lettres de proposition qui ont une occurrence dans cette formule.

Nous tirons une première conséquence de ces deux affirmations : pour déterminer la valeur de vérité d'une formule donnée, il suffit de considérer les valeurs de vérité qui sont attribuées aux lettres de proposition qui figurent - dans cette formule.

-
Deux valuations qui diffèrent uniquement par la formule - qu'elles attribuent à d'autres lettres pourront donc être considérées comme identiques. Il faut noter qu' à strictement parler, une valuation attribue une valeur de vérité à - toutes les lettres de proposition de L0 classique et L0 "trivalente", qui sont en nombre infini. En pratique, lorsqu'on considérera une formule ou un ensemble de formules, on nommera – valuation la restriction d'une valuation aux lettres de proposition qui figurent de proposition qui figurent dans ces formules. Comme une formule ne contient qu'un nombre fini de lettres de - proposition, on pourra énumérer l'ensemble fini des valuations qui concerne cette formule. Par exemple, si la formule ne contient qu'une seule lettre, dans p, il n'y a que deux possibilités ou trois possibilités "trivalentes" d'attribution de valeurs de vérité à cette lettre V ou F, ou encore V ou F et N, ce que l'on représente ainsi

Ci-après la valeur de L0 "classique"

p

V
F

Ci-après la valeur de L0 “trivalente”

p
V
F
N

Si la formule continent deux lettres, disons p et q, il ya quatre valuations de L0 classiques possibles (car p peut etre V ou F, et q peut-être V ou F), ce que l’on représentera ainsi :

p	q	
V	V	
V		F
F		V
F	F	

Ci-après la valeur de L0 “trivalente” pour deux lettres

p	q	
V		V
V		F
V		N
F		V
F		F
F		N
N		V
N		F
N	N	

Si la formule contient trois lettres, disons p , q et r , il ya huit valuations possibles, dont chacune est représentée par une ligne du tableau suivant :

p	q	r		
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F			F	V
F	F	F		

Si en raison de l’ajout d’un variable r ici en L0 classique ou d’ajout d’une valeur N en L0 “trivalent” qu’on passe de quatres valuations à huit valuations.

Il est aisé de montrer que, plus généralement, si n lettres de proposition différentes figurent dans une formule, il suffit de considérer 2n valuations pour embrasser toutes les valuations possibles.

Une seconde conséquence des deux affirmations précédentes est que pour une valuation “v” de L0 classique ou de L0 “trivalente” donnée, il est possible de – calculer la valeur de vérité d’une formule “φ” quelconque, en utilisant les définitions des connecteurs. Considérons par exemple la formule (p⇒(r∧–q)) et la valuation “v” on va s’amuser à définir sa valuation par la suite, pour comparer si la même formule exprime la même valuation en

L0 classique et “trivalent”.

Voici - une formule tautologique de L0 classique, on va s’exercer à formuler une formule de L0 classique et en L0 “trivalent” pour démontrer si c’est vrai ou faux si l'interprétation classique de la valuation “v” est égale à l'interprétation “trivalente de N valeur forte et faible de Kleene.

10. Exercice 1. : Tautologie classique

On va s’exercer à formuler des formules de L0 ou L1 classique et en L0 ou L1 “trivalent” pour démontrer si c’est vrai ou faux si l'interprétation classique de la valuation “v” de la Tautologie est égale à l'interprétation “trivalente” de N valeur forte et faible de Kleene.

Ci-après une formule tautologique de L0

p	q	-p	(p∨-p)	(p∧-p)	–(p∧-p)	(p⇒p)
V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

- (p∨-p) est donc une formule tautologique de L0 classique
- (p∧-p) est donc une formule tautologique de L0 classique
- –(p∧-p) est donc une formule tautologique de L0 classique
- (p⇒p) est donc une formule tautologique de L0 classique

Ci-après une formule tautologique de L0 “trivalente” forte

p	q	-p	(p∨1-p)	(p∧1-p)	–(p∧-p)	(p⇒1p)	(vu)
V	V	F	V	F	V	V	
V	F	F	V	F	V	V	
V	N	F	V	F	V	V	
F	V	V	V	F	V	V	
F	F	V	V	F	V	V	
F	N	V	V	F	V	V	
N	V	V	N	N	V	N	
N	F	V	N	N	V	N	
N	N	V	N	N	V	N	

- –(p∧1-p) est donc une formule tautologique de L0 “trivalente” forte
- (p∨1-p) n’est donc pas une formule tautologique de L0 “trivalente forte
- (p∧1-p) n’est donc pas une formule tautologique de L0 “trivalente forte
- (p⇒1p) n’est donc pas une formule tautologique de L0 “trivalente forte

Ci-après une formule tautologique de L0 “trivalente” faible

p	q	-p	(p∨2-p)	(p∧2-p)	–(p∧2-p)	(p⇒2p)	(vu)
V	V	F	V	F	V	V	
V	F	F	V	F	V	V	
V	N	F	V	F	V	V	
F	V	V	V	F	V	V	
F	F	V	V	F	V	V	
F	N	V	V	F	V	V	
N	V	N	N	N	N	N	
N	F	N	N	N	N	N	

N N N N N N N

- (p∨1–p) n’est donc pas une formule tautologique de L0 “trivalente faible
- (p∧2–p) n’est donc pas une formule tautologique de L0 “trivalente faible
- –(p∧2–p) n’est donc pas une formule tautologique de L0 “trivalente faible
- (p⇒2p) n’est donc pas une formule tautologique de L0 “trivalente faible

On remarque qu’il ya une différence par degré forte ou faible entre une formule tautologique de L0 et de L0 “trivalente” forte et faible.

Conclusion :
- Toute constante logique ∧, ∨, ⇒, ⇔ de L0 classique peut contenir une formule tautologique avec une interprétation égale à une formule tautologique de L0 classique
- Toute constante logique ∧, ∨, ⇒, ⇔ de L0 “trivalente” forte peut contenir certains formules tautologiques avec une interprétation égale à une formule tautologique de L0 classique
- Aucune constante logique ∧, ∨, ⇒, ⇔ de L0 “trivalente” faible ne peut pas contenir une formule tautologique avec une interprétation égale à une formule tautologique de L0 classique
-
-

Note :
- Ex. –(p∧1–p) est une formule tautologique de L0 classique et “trivalente donc avec une interprétation égale à une formule tautologique de L0 classique

On remarque donc que certaines formules sont des tautologies. Considérons le L0 classique, les deux premières peuvent être considérées comme une formulation, dans L0 classique, du principe du tiers-exclu respectivement, du principe de non-contradiction. La quatrième peut-être vue comme une formalisation de “s’il fait jour, alors il fait jour” .

L’expression “ ⊨(p∨–p) ” et “ ⊨(p∨1–p) ” n’est pas une formule de L0 classique ni “trivalente”, mais elle sert à porter un - jugement, en affirmant, au sujet de la formule “ ⊨(p∨–p) ” de L0 classique et au sujet de la formule “ ⊨(p∨1–p) ” de L0 “trivalente” forte, qu’il s’agit d’une tautologie.

Exercice 1.2. . (Preuve que “ ⊨(p∨–p) ” et “ ⊨(p∨1–p) ” est conséq. log.)

On va essayer de prouver qu’une tautologie est - conséquence logique de n’importe quelle proposition. Autrement dit, que pour toute formule B, si ⊨A, alors B ⊨A. Il est aisé de prouver qu’il est vrai pour L0 classique mais essayons de prouver le théorème pour une formule de L0 “trivalent” fort car on sait déjà qu’il est faux pour le L0 “trivalent” faible.

- Prenons deux formules B de L0 classiques et “trivalentes” fortes : (p⇒1p) et –(p∧1–p)
- Essayons de prouver si B, si ⊨A, alors B ⊨A.
- Ci-après son Table de vérité : (p⇒1p) et (p∧1–p)
- Essayons donc de prouver cette formule : (p⇒1p)⇒1 (p∨1–p) et (p∧1–p) ⇒1 (p∨1–p)

Ci-après la table de vérité des formules de ce théorème de L0 classique

p	q	–p	(p∨–p)	(p∧–p)	–(p∧–p)	(p⇒p)	(p⇒p)⇒1 (p∨–p)	–(p∧–p) ⇒1 (p∨–p) (vu)
V	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V

Note :
- Le théorème, on voit qu’il est vrai au moins pour ces deux formules de L0 classique
- Le théorème, il faut le vérifier pour être sûre pour toutes les formules de L0 classique

Ci-après la table de vérité des formules du théorème de L0 “trivalente” forte

p	q	–p	(p∨1–p)	(p∧1–p)	–(p∧1–p)	(p⇒1p)	(p⇒1p)⇒1 –(p∧1–p)	(p∧1–p) ⇒1 –(p∧1–p) (??)
V	V	F	V	F	V	V	V	vu
V	F	F	V	F	V	V	V	V
V	N	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	N	V	V	F	V	V	V	V
N	V	V	N	N	V	N	N	N
N	F	V	N	N	V	N	N	N
N	N	V	N	N	V	N	N	N

Conclusion :
- Le théorème est vrai pour toute formule B, si ⊨A, alors B ⊨A de L0 classique avec une interprétation égale à une formule tautologique de L0 classique
- Le théorème est faux pour la formule B, si ⊨A, alors B ⊨A “trivalente” forte avec une interprétation égale à une formule tautologique de L0 classique mais B, si ⊨A, alors B ⊨A “trivalente” forte est vrai pour certaines formules et non pour toutes les formules avec une interprétation égale à une formule de L0 classique
- Ex. Pour une formule B, si ⊨A, alors B ⊨A si B est égale à la formule ”--p” de L0 classique et L0 trivalente “forte” alors –(p∧1–p)⇒1–p est vrai en L0 classique et trivalente avec une interprétation égale à une formule de

L0 classique

- Le théorème est faux pour toute formule B, si ⊨A, alors B ⊨A “trivalente” faible
Note :
- On a donc essayé de prouver qu’une tautologie est - conséquence logique de n’importe quelle proposition pour un L0 valide. Autrement dit, que pour toute formule B, si ⊨A, alors B ⊨A. Il est possible de prouver pour toute formule qu’il est vrai pour L0 classique mais il est vrai juste pour certaines formules et non pour toute formule de L0 “trivalent” fort et il est impossible pour le L0 “trivalent” faible.
-

11. Qu’est-ce qu’une formule valide ?

On va essayer de chercher au moins si une formule “trivalente” maintenant de L1 forte et faible peut avoir des formules valides comme l’a une formule de L1 classique. Pour cela on va s’exercer encore ici à formuler des formules de L0 ou L1 classique et en L0 ou L1 “trivalent” pour démontrer si c’est vrai ou faux si l'interprétation classique de la valuation “v” d’une Formule valide classique est égale à l'interprétation “trivalente” de Kleene.

On se souvient que “valide” se dit d’une inférence (cf. modus ponens, John; Jeffrey, Richard C. (2007). Computability and logic : Cambridge University Press. p. 364 : une inférence est valide si la conclusion est conséquence logique des prémisses. Ce qu’on définit maintenant est différent puisqu’il s’agit ici d’une autre validité d’un - énoncé. Pour cela, rappelons tout d’abord ce qu’une interprétation du langage de L1 classique et “trivalente” forte et faible. Une interprétation de L1 est donnée par :

1. un domaine d’individus que parcourent les variables “v” (le domaine doit comporter au moins un individu);
2. pour chaque symbole de prédicat, une partie du domaine d’individus qui est l'interprétation du symbole de prédicat en question.

Rappelons également que l’on distingue deux sortes de formules de L1, étudions le cas classique :

3. celles qui ne correspondent pas à un - énoncé du langage usuel ; par exemple, si “P” est interprété par les philosophes et “Q” par les logi-ciens (dans le domaine des êtres humains), alors “Px” peut se lire “x est philosophe” et (Px∧Qx) “ x est philosophe et logicien”.

4. celles qui correspondent à un - énoncé du langage usuel ; par exemple, pour la même interprétation, ∀xPx et ∃x(Px∧Qx) se lisent respectivement, “tous les hommes sont philosophes” (énoncé qui est faux) et “certains hommes sont philosophes et logiciens” (énoncé” qui est vrai).

Dans les formules de la seconde sorte, toutes les variables sont sous la dé-pendance d’un quantificateur. De telles formules sont elles-mêmes nommées “énoncés”. Dans les formules de la première sorte, il y a au moins une variable qui n’est pas sous la dépendance d’un quantificateur. De telles formules sont nommées “formules ouvertes”, et les variables non liées par un quantificateur sont dites - libres.

- Énoncé valide de L1 classique et de L1 “trivalent”
On dit qu’un énoncé de L1 classique et L1 “trivalent” est - valide s’il est vrai pour toute inter-prétation du langage.

Pour exprimer que l'énoncé "φ" est valide, on utilise la notation suivante : ⊨φ

- Note : ⊨φ est différent de ⊨B qui est une conséquence logique.

Exemple de formules valides : (On peut essayer de le prouver s'il est vrai de L0 classique et L0 "trivalent")

∀x(Px⇒Px) ; ∀x(Px∨–Px) ; ∀x–(Px∧–Px) ; (∀xPx⇒∃xPx)

- On cherchera à prouver par la suite, pour tous les cas, si ces formules sont valides à la fois en L1 classique et en L1 "trivalent" . Pour prou-ver qu'une formule n'est pas valide, il suffit de trouver une interprétation du langage qui la rende fausse et on verra cela avec les formules avec les énoncés "contradictoires".
- En effet, il est possible de prouver si les formules ∀x Px et (∃xPx⇒∀xPx) sont valides.
- En effet, il est possible de prouver si il y a des formules valide de L1 et L1 "trivalent" qui ne sont pas un théorème de L1 comme pour si B, si ⊨A, alors B ⊨A pour une formule de L0 Classique ou qui sont contradictoires pour une formule de L0 Classique.

12. Qu'est-ce qu'une contradiction ?

Deux énoncés sont de manière évidente en contradiction l'un avec l'autre, prenons le cas de L0 ou L1 classique, lorsque l'un est la négation logique de l'autre. Par exemple :

- L'URSS est responsable du massacre de Katyn.
- L'URSS n'est pas responsable du massacre de Katyn.

- En L0 et L1, "trivalent" et classique, ces deux énoncés ont comme formule : (p∧–p)
- En L0 et L1 "trivalent" et class. on définit la contradiction qu'en terme de valuation "v" de deux façons :
- En L0 et L1 "trivalent" on définit la contradiction qu'en terme de valuation "v". Il y a donc contradiction, si la valuation est une contradiction classique pour les valeurs de V et F et quand en plus la valuation donne N quand la valuation est neutre. Pour les définitions générales on reste en L0 ou L1 classique pour plus de commodité.
- En L0 et L1 classique la contradiction est pour ainsi dire une -tautologie à variable faux tel : (p∧–p)

Cette condition pour le cas classique (que l'un des énoncés soit la négation logique de l'autre) est - suffisante, mais n'est pas - nécessaire pour que ces énoncés forment un ensemble contradictoire, le L0 et L1 "trivalent" montre par exemple un rapport différent et surtout deux énoncés sans le formalisme de L0 et L1 sont plus complexes.
En effet, des énoncés peuvent très bien se contredire sans qu'il y ait, parmi eux contradiction, deux énoncés dont l'un soit la négation de l'autre. Considérons par exemple, l'ensemble des trois énoncés suivants :

- Socrate introduit de nouveaux dieux dans la cité ou corrompt la jeu-nesse.

On demande ainsi de s'en persuader en imaginant différentes interprétations de ces formules. Un cours plus avancé exposerait une

méthode de preuve.

- Socrate n’introduit pas de nouveaux dieux dans la cité
- Socrate ne corrompt pas la jeunesse.

Parmi ces trois énoncés, aucun n’est la négation d’un autre. Il est délicat d' établir le même énoncé pour L0, L1 “trivalent” on va le voir. Par ex. L’énoncé dont la valeur est N : Socrate (le chat) ne corrompt pas la jeunesse.
Quelle perspective avons-nous d’affirmer qu’ils forment un ensemble contradictoire ? On distin-guera un peu deux raisons :

1. Cet ensemble d’énoncés est contradictoire simplifions pour le cas de L0 classique, parce qu’il est possible de - déduire une contradiction à partir de ces trois énoncés pris comme un prémisses d’un raisonnement. On va essayer de faire de même pour l’énoncé (Socrate “le chat”) dans L0 ou L1 “trivalent”

2. Cet ensemble d’énoncés est contradictoire parce que les trois énoncés ne peuvent pas être simultanément vrais dans L0 ou L1 classique.

p : Socrate introduit de nouveaux dieux dans la cité.
q : Socrate corrompt la jeunesse

Les trois énoncés précédents peuvent être représentés, respectivement, par les formules (pvq), –p et –q du langage L0 classique. Les formules sont les mêmes pour le L0 “trivalent”, c-a-d (pvq), –p et –q. Des deux premiers énoncés, on peut déduire “q”, qui est la négation du troisième énoncé, –q en L0 classique, il reste à le prouver pour L0 “trivalent”. On voit ainsi assez au moins en L0 classique qu’il est possible de - déduire une contradiction (un énoncé et sa né-gation) des trois énoncés initiaux. Pour un ensemble plus complexe d’énoncés, il est tout à fait possible que l’ensemble soit contradictoire (au premier des deux sens distingués ci-dessus) sans qu’on s’en aperçoive, lorsqu’on ne voit pas comment déduire une contradiction.

Considérons maintenant le second sens donné ci-dessus à “contradic-toire”. Les trois énoncés (pvq), –p et –q peuvent-ils être simultanément vrais? Si le premier est vrai, il faut nécessairement que “p” soit vrai ou que “q” soit vrai. Dans le premier cas, le second est faux ; dans le second cas, c’est le troisième énoncé qui est faux. Ainsi, les trois énoncés ne peuvent être simultanément. On ne peut parler de tant des déductions pour le L0 ou L1 “trivalent” avant d’avoir effectué effectivement l’analyse des valuations “v” dans une table de vérité. Pour L0 classique, dans les termes de cette logique propositionnelle : aucune valuation ne rend simultanément vraies les trois formules.

On notera que ces trois énoncés ne forment pas un raisonnement ou une inférence. Il n’y a, ici ni prémisses ni conclusions, seulement une suite ou un ensemble de trois énoncés et dont la contradiction est donc tacite.
Et de fait, l’histoire des sciences offre des exemples célèbres de théories qui ont été pro-posées, et dont personne ne s’est aperçu avant plusieurs années qu’elles étaient contradictoires. Ainsi, Frege a publié en 1893 une théorie de l’arithmétique dont Russell a montré, seulement un an plus tard, qu’il était possible d’en déduire une contradiction.

Cela apparaît clairement dans la table de vérité suivante :

p q (pvq) –p –q (vu)

V	V	V	F	F
V	F	V	F	V
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V

Ci-après le tableau “trivalent” fort

p	q	(pv1q)	–p	–q	(vu)
V	V	V	F	F	
V	F	V	F	V	
V	N	N	F	V	
F	V	V	V	F	
F	F	F	V	V	
F	N	F	V	V	
N	V	N	V	F	
N	F	F	V	V	
N	N	N	V	V	

Ci-après le tableau “trivalent” faible

p	q	(pv2q)	–p	–q	(vu)
V	V	V	F	F	
V	F	V	F	V	
V	N	N	F	N	
F	V	V	V	F	
F	F	F	V	V	
F	N	N	F	N	
N	V	N	N	N	
N	F	N	N	N	
N	N	N	N	N	

Note : La contradiction n’est pas vrai pour les trois formules (pv2q), –p et –q en logique “trivalente” faible.

Chapitre 2

Conclusion :

On peut donc distinguer deux définitions d’un ensemble - contradictoire d’énoncés :

1. Un ensemble d’énoncés est contradictoire si l’on peut en déduire une contradiction.
2. Des énoncés forment un ensemble contradictoire s’il ne peuvent être simultanément vrais.

Nous n'examinerons pas plus précisément la première de ces deux définitions. En revanche, nous retiendrons l’idée de base de la seconde pour définir des termes applicables aux cas des langages formels L0 et L1 classique et “trivalent”. Il suffira pour cela d’interpréter l’expression “ne peuvent pas etre simultanément vrais” par : ne sont simultanément vrais pour - aucune interprétation du langage. Cette phrase écarte directement on va le démontrer le L0 et L1 “trivalent” faible.

On peut donc maintenant formuler les définitions suivante :

Antilogie
- On dit qu’une formule de L0 est une - antilogie si elle prend la valeur faux pour toute valuation.

Ensemble contradictoire (L0)
- On dit qu’un ensemble de formules de L0 est - contradictoire si aucune valuation ne rend vraies toutes les formules de l’ensemble.

Enoncé invalide
- On dit qu’un énoncé de L1 est - invalide s’il est faux pour toute interprétation du langage.

Ensemble contradictoire (L1)
- On dit qu’un ensemble d’énoncés de L1 est - contradictoire si aucune interprétation du langage ne rend vrais tous les énoncés de l’ensemble.

Pour prouver qu’un ensemble d'énoncés n’est pas contradictoire, il suffit de trouver une interprétation du langage qui satisfait tous les énoncés de cet ensemble. Pour prouver qu’un tel ensemble est contradictoire, on peut raisonner par l’absurde : on suppose qu’il existe une interprétation du langage qui donne à chaque énoncé de l’ensemble la valeur vrai et on montre que cette supposition conduit à une contradiction.

N.B : Il faut noter qu’on ajoute ces définitions car ils seront importants pour déterminer par la suite les formules contradictoires de L0 et L1 classique et “trivalent” s' ils sont conformes avec une interprétation égale à une formule tautologique de L0 classique.

On ajoute à cela les définitions suivantes :

Formule satisfaisable de L0
- On dit qu’une formule de L0 est - satisfaisable s’il existe une valuation qui la rend vraie

Ensemble satisfaisable de formules de L0
- On dit qu’un ensemble de formules de L0 est - satisfaisable s’il existe une valuation qui satisfait toutes les formules de l’ensemble.

Énoncé satisfaisable de L1
- On dit qu’un énoncé de L1 est - satisfaisable s’il existe une interprétation du langage qui le rend vrai.

Ensemble satisfaisable d’énoncés de L1
- On dit qu’un ensemble d’énoncés de L1 est - satisfaisable s’il existe une interprétation du langage qui satisfait toutes les formules de l’ensemble.

Pour prouver qu’une formule de L0 est satisfaisable, il suffit de trouver une valuation qui la rend vraie. Pour prouver qu’un énoncé de L1 est satisfaisable, il suffit de trouver une interprétation du langage qui le rend vrai. Par exemple, $\forall xPx$ et $(\exists xPx \Rightarrow \forall xPx)$ sont satisfaisables.

Chapitre 2.

I. Exercice et conclusion

1. Exercices et Lois

Ainsi une fois les définitions établis on va essayer de prouver qu’il est possible d’établir l’existence des formules pour résumer on va prendre les formules de L0 dont l'interprétation en L0 classique et L0 “trivalente” est

égale avec une interprétation dont la “valuation” est égale à une formule tautologique ou une loi de L0 classique.

- Il suffit pour cela de considérer l’interpréta-tion dans laquelle le domaine de validité des formules est égale à une loi en L0 classique et L0 “trivalent” faible ou fort.

Ci-après une liste des Lois de L0 classique à considérer pour l'exercice:

I.. Lois d’absorption

- $\models((p\wedge(p\vee q))\Leftrightarrow p)$
- $\models((p\vee(p\wedge q))\Leftrightarrow p)$

II.. Lois de De Morgan

- $\models-(p\wedge q))\Leftrightarrow(--p\vee-q)$
- $\models-(p\vee q))\Leftrightarrow(--p\wedge-q)$

III.. Les lois de De Morgan peuvent être généralisées :

- $\models-(p1\wedge p2\wedge\ldots\wedge pn)\Leftrightarrow(--p1\vee-p2\vee\ldots\vee-pn)$
- $\models-(p1\vee p2\vee\ldots\vee pn)\Leftrightarrow(--p1\wedge-p2\wedge\ldots\wedge-pn)$

IV.. Relations entre connecteurs

- $\models(p\wedge q)\Leftrightarrow-(--p\vee-q)$
- $\models(p\wedge q)\Leftrightarrow-(p\Rightarrow-q)$

- $\models(p\vee q)\Leftrightarrow-(--p\wedge-q)$
- $\models(p\vee q)\Leftrightarrow-(--p\Rightarrow-q)$

- $\models(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(--p\vee q)$
- $\models(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(--p\wedge-q)$

- $\models(p\Leftrightarrow q))\Leftrightarrow((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p))$
- $\models(p\Leftrightarrow q))\Leftrightarrow((p\wedge q)\vee(--p\wedge-q))$
- $\models(p\Leftrightarrow q))\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(--q\vee p))$

V.. Lois de neutralisalion

- Si $\models A$, alors $\models(A\wedge B)\Leftrightarrow B$
- Si A est une antilogie, alors $\models(A\vee B)\Leftrightarrow B$

Tautologies concernant plus spécialement l’implication

VI. Affaiblissement $\models(p\Rightarrow(q\Rightarrow p))$
$\models(p\Rightarrow q)\vee(q\Rightarrow p)$

VII. Loi de Peirce $\models((p\Rightarrow q)\Rightarrow p)\Rightarrow p$

VIII. Loi de contraposition $\models(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(--q\Rightarrow-p)$
IX. Transitivité de l’implication $\models(p\Rightarrow q))\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
X. Autodistributivité de l’implication $\models(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))\Leftrightarrow((p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
XI. Loi d’exportation-importation $\models((p\wedge q)\Rightarrow r)\Leftrightarrow(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))$
XII. Réfutation par l’absurde $\models((p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow-q))\Rightarrow-p$
XIII. Démonstration indirecte $\models((--p\Rightarrow q)\wedge(--p\Rightarrow-q))\Rightarrow p$

Chapitre 3.

2. Résolution

I. Lois d’absorption

- ⊨((p∧(p∨q))⇔p)
- ⊨((p∨(p∧q))⇔p)

1. A. ((p∧(p∨q))⇔p)

p	q	(p∨q)	–p	–q	(p∧(p∨q))	((p∧(p∨q))⇔p) (vu)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V

1. B. ((p∨(p∧q))⇔p)

p	q	(p∧q)	–p	–q	(p∨(p∧q)	((p∨(p∧q))⇔p) (vu)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V

2. A. ((p∧(p∨q))⇔p) : L0 “trivalent” fort

p	q	(p∨q)	–p	–q	(p∧(p∨q))	((p∧(p∨q))⇔p) (vu)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	N	N	F	V	N	N
F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V
F	N	V	V	V	F	V
N	V	N	V	V	N	N
N	F	V	V	V	N	N
N	N	N	V	V	N	N

2. B. ((p∨(p∧q))⇔p) : L0 “trivalent” fort

p	q	(p∧q)	–p	–q	(p∨(p∧q)	((p∨(p∧q))⇔p)) (vu)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
V	N	N	F	V	N	N
F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V
F	N	F	V	V	F	V
N	V	N	V	V	N	N
N	F	F	V	V	N	N
N	N	N	V	V	N	N

3. A. ((p∧(p∨q))⇔p) : L0 “trivalent” faible

p	q	(p∨q)	–p	–q	(p∧(p∨q))	((p∧(p∨q))⇔p) (vu)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	N	N	F	N	N	N

F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V
F	N	N	V	N	N	N
N	V	N	N	F	N	N
N	F	N	N	V	N	N
N	N	N	N	N	N	N

3. B. ((p∨(p∧q))⇔p) : L0 “trivalent” faible

p	q	(p∧q)	–p	–q	((p∨(p∧q))	((p∨(p∧q))⇔p) (vu)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
V	N	N	F	N	N	N
F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V
F	N	N	V	N	N	N
N	V	N	N	F	N	N
N	F	N	N	V	N	N
N	N	N	N	N	N	N

II. Lois de De Morgan

- ⊨–(p∧q))⇔(--p∨–q)
- ⊨–(p∨q))⇔(--p∧–q)

1. –(p∧q))⇔(--p∨–q)

p	q	(p∨q)	–p	–q	(p∧q)	–(p∧q)	(--p∨–q)	–(p∧q))⇔(--p∨–q) (vu)
V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V

2. –(p∧q))⇔(--p∨–q) : L0 “trivalent” fort

p	q	(p∨q)	–p	–q	(p∧q)	–(p∧q)	(--p∨–q)	–(p∧q))⇔(--p∨–q) (vu)
V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	N	N	F	V	N	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V
F	N	V	V	V	F	V	V	V
N	V	N	V	F	N	V	V	V
N	F	F	V	V	F	V	V	V
N	N	N	V	V	N	V	V	V

3. –(p∧q))⇔(--p∨–q) : L0 “trivalent” faible

p	q	(p∨q)	–p	–q	(p∧q)	–(p∧q)	(--p∨–q)	–(p∧q))⇔(--p∨–q) (vu)
V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	N	N	F	N	N	N	N	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V

F F F V V F V V V
F N N V N N N N V
N V N V F N N V V
N F N N V N N N N
N N N N N N N N N

III. Les lois de De Morgan peuvent être généralisées :

- ⊨–(p1∧p2∧…∧pn)⇔(--p1∨–p2∨…∨–pn)
- ⊨–(p1∨p2∨…∨pn)⇔(--p1∧–p2∧…∧–pn)

1. –(p1∧p2∧…∧pn)⇔(--p1∨–p2∨…∨–pn

p q (p∨q) –p –q (p∧p) (--pV–p) (p1∧p2∧p3) –(p1∧p2∧p3) (--p1∨–p2∨–p3) (pn∧⇔-pn∨) (vu)
V V V F F V F V F
F V
V F V F V V F V F
F V
F V V V F F V F V
V V
F F F V V F V F V
V V

2. –(p1∧p2∧…∧pn)⇔(--p1∨–p2∨…∨–pn : L0 “trivalent” fort

p q (p∨q) –p –q (p∧p) (--pV–p) (p1∧p2∧p3) –(p1∧p2∧p3) (--p1∨–p2∨–p3) (pn∧⇔-pn∨) (vu)
V V V F F V F V F
F V
V F V F V V F V F
F V
V N N F V V F V F
F V
F V V V F F V F V
V V
F F F V V F V F V
V V
F N V V V F V F V
V V
N V N V F N V N V
V V
N F V V V N V N V
V V
N N N V V N V N V
V V

3. –(p1∧p2∧…∧pn)⇔(--p1∨–p2∨…∨–pn : L0 “trivalent” faible

p q (p∨q) –p –q (p∧p) (--pV–p) (p1∧p2∧p3) –(p1∧p2∧p3) (--p1∨–p2∨–p3) (pn∧⇔-pn∨) (vu)
V V V F F V F V F
F V
V F V F V F F V F
F V
V N N F N N F V F

									F	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
F	N	N	V	N	N	V	F	V	V	V
N	V	N	N	F	N	N	N	N	N	N
N	F	N	N	V	N	N	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N

IV. Relations entre connecteurs

- ⊨(p∧q)⇔–(--p∨–q)
- ⊨(p∧q)⇔–(p⇒–q)

1. (p∧q)⇔–(--p∨–q)

p	q	(p∨q)	–p	–q	(p∧q)	(p∧q)	(--p∨–q)	–(--p∨–q)	(p∧q)⇔–(--p∨–q) (vu)
V	V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	V	V	F	F	V	F	V

2. (p∧q)⇔–(--p∨–q) : L0 “trivalent” fort

p	q	(p∨q)	–p	–q	(p∧q)	(p∧q)	(--p∨–q)	–(--p∨–q)	(p∧q)⇔–(--p∨–q) (vu)
V	V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
V	N	N	F	V	N	N	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	V	V	F	F	V	F	V
F	N	V	V	V	F	F	V	F	V
N	V	N	V	F	N	N	V	F	F
N	F	V	V	V	F	F	V	F	V
N	N	N	V	V	N	N	V	F	F

3. (p∧q)⇔–(--p∨–q) : L0 “trivalent” faible

p	q	(p∨q)	–p	–q	(p∧q)	(p∧q)	(--p∨–q)	–(--p∨–q)	(p∧q)⇔–(--p∨–q) (vu)
V	V	V	F	F	V	V	F	V	

V
V F V F V F F V F
V
V N N F N N N N N
N
F V V V F F F V F
V
F F F V V F F V F
V
F N V V N N N N F
N
N V N N F N N N F
N
N F V N V N N N F
N
N N N N N N N N F
N

V.. Lois de neutralisalion

- Si ⊨A, alors ⊨(A∧B)⇔B
- Si A est une antilogie, alors ⊨(A∨B)⇔B

1. (A∧B)⇔B Ex. (p∧q)⇔–(--p∨–q)∧(p∨q)⇔(p∨q)

p q (p∧q) –p –q (p∧q)⇔–(--p∨–q) (p∧q)⇔–(--p∨–q)∧(p∨q)
x⇔(p∨q) cqfd (A∧B)⇔B vu
V V V F F V V
V
V F F F V V V
V
F V F V F V V
V
F F F V V V F
V

2. (A∧B)⇔B Ex. (p∧q)⇔–(--p∨–q)∧(p∨q)⇔(p∨q) : L0 “trivalent” fort

p q (p∧q) –p –q (p∧q)⇔–(--p∨–q) (p∧q)⇔–(--p∨–q)∧(p∨q)
x⇔(p∨q) cqfd (A∧B)⇔B vu
V V V F F V V F V V
V
V F F F V V F V V V
V
V N N F V F F V F N
F
F V F V F V F V V V
V
F F F V V V F V F F
V
F N F V V V F V V V
V
N V N V F F F V F N
F
N F F V V V F V V V
V
N N N V V F F V F N
F

3. A∧B)⇔B   Ex. (p∧q)⇔–(--p∨–q)∧(p∨q)⇔(p∨q) : L0 “trivalent” faible

p	q	(p∧q)	–p	–q	(p∧q)⇔–(--p∨–q)			(p∧q)⇔–(--p∨–q)∧(p∨q) x⇔(p∨q)	cqfd (A∧B)⇔B	vu
V	V	V	F	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	V	V
V	N	N	F	N	N	N	N	N	N	N
F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	N	N	V	N	N	N	N	N	N	N
N	V	N	N	F	N	N	N	N	N	N
N	F	N	N	V	N	N	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N

Tautologies concernant plus spécialement l’implication

VI.   Affaiblissement   ⊨(p⇒(q⇒p))

⊨(p⇒q)∨(q⇒p)

1.A. (p⇒(q⇒p)

p	q	(p⇒q)	–p	–q	(q⇒p)	(p⇒(q⇒p)) (vu)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

1.B. (p⇒q)∨(q⇒p)

p	q	(p∨q)	–p	–q	(p⇒q)	(q⇒p))	(p⇒q)∨(q⇒p)	(vu)
V	V	V	F	F	V	V	V	
V	F	V	F	V	F	V	V	
F	V	V	V	F	V	F	V	
F	F	F	V	V	V	V	V	

2.A. (p⇒(q⇒p) : L0 “trivalent” fort

p	q	(p⇒q)	–p	–q	(q⇒p)	(p⇒(q⇒p)) (vu)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
V	N	N	F	V	N	N
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	N	V	V	V	F	V
N	V	N	V	F	N	N
N	F	F	V	V	V	N
N	N	N	V	V	N	N

2.B. (p⇒q)∨(q⇒p) : L0 “trivalent” fort

p	q	(p∨q)	-p	-q	(p⇒q)	(q⇒p))	(p⇒q)∨(q⇒p) (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	N	N	F	V	N	N	N
F	V	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V
F	N	V	V	V	V	F	V
N	V	N	V	F	N	N	N
N	F	V	V	V	F	V	V
N	N	N	V	V	N	N	N

3.A. (p⇒(q⇒p) : L0 "trivalent" faible

p	q	(p⇒q)	−p	−q	(q⇒p)	(p⇒(q⇒p)) (vu)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
V	N	N	F	N	N	N
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	N	N	V	N	N	N
N	V	N	N	F	N	N
N	F	N	N	V	N	N
N	N	N	N	N	N	N

3.B. (p⇒q)∨(q⇒p) : L0 "trivalent" faible

p	q	(p∨q)	-p	-q	(p⇒q)	(q⇒p))	(p⇒q)∨(q⇒p) (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	N	N	F	N	N	N	N
F	V	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V
F	N	V	V	N	N	N	N
N	V	N	N	F	N	N	N
N	F	V	N	V	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N

VII. Loi de Peirce

1. ((p⇒q)⇒p)⇒p

p	q	(p∨q)	-p	-q	(p⇒q)	(p⇒q)⇒p)	((p⇒q)⇒p)⇒p (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V

2. ((p⇒q)⇒p)⇒p : L0 "trivalent" fort

p	q	(p∨q)	-p	-q	(p⇒q)	(p⇒q)⇒p)	((p⇒q)⇒p)⇒p (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	N	N	F	V	N	N	N

F	V	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V
F	N	V	V	V	V	F	V
N	V	N	V	F	N	N	N
N	F	V	V	V	F	V	N
N	N	N	V	V	N	N	N

3. ((p⇒q)⇒p)⇒p : L0 “trivalent” faible

p	q	(pvq)	-p	-q	(p⇒q)	(p⇒q)⇒p)	((p⇒q)⇒p)⇒p (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	N	N	F	N	N	N	N
F	V	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V
F	N	V	V	N	N	N	N
N	V	N	N	F	N	N	N
N	F	V	N	V	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N

VIII. Loi de contraposition

1. (p⇒q)⇔(--q⇒–p)

p	q	(pvq)	-p	-q	(p⇒q)	(--q⇒-p))	(p⇒q)⇔(--q⇒-p) (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

2. (p⇒q)⇔(--q⇒–p) : L0 “trivalent” fort

p	q	(pvq)	-p	-q	(p⇒q)	(--q⇒-p))	(p⇒q)⇔(--q⇒-p) (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	F
V	N	N	F	V	N	V	N
F	V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V
F	N	V	V	V	V	V	V
N	V	N	V	F	N	F	F
N	F	V	V	V	F	V	F
N	N	N	V	V	N	V	N

3. (p⇒q)⇔(--q⇒–p) : L0 “trivalent” faible

p	q	(pvq)	-p	-q	(p⇒q)	(--q⇒-p))	(p⇒q)⇔(--q⇒-p) (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	N	N	F	N	N	F	N
F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V
F	N	N	V	N	N	N	N
N	V	N	N	F	N	N	N
N	F	N	N	V	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N

IX. Transitivité de l’implication

1. (p⇒q))∧(q⇒r)⇒(p⇒r)

p	q	r	$(p\Rightarrow q)$	$(q\Rightarrow r)$	$(p\Rightarrow q))\wedge(q\Rightarrow r)$	$(p\Rightarrow r)$	$(p\Rightarrow q))\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

X. Autodistributivité de l'implication

1. $(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))\Leftrightarrow((p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

p	q	r	$(p\Rightarrow q)$	$(q\Rightarrow r)$	$(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))$	$(p\Rightarrow r)$	$((p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$	$(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))\Leftrightarrow((p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

XI. Loi d'exportation-importation

1. $((p\wedge q)\Rightarrow r)\Leftrightarrow(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))$

p	q	r	$(p\wedge q)$	$(q\Rightarrow r)$	$((p\wedge q)\Rightarrow r)$	$(p\Rightarrow r)$	$(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))$	$((p\wedge q)\Rightarrow r)\Leftrightarrow(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

XII. Réfutation par l'absurde

1. $((p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow -q))\Rightarrow -p$

p	q	$(p\vee q)$	$-p$	$-q$	$(p\Rightarrow q)$	$(p\Rightarrow -q)$	$(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow -q)$	$((p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow -q))\Rightarrow -p$ (vu)
V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

2. ((p⇒q)∧(p⇒−q))⇒−p : L0 “trivalent” fort

p	q	(p∨q)	-p	-q	(p⇒q)	(p⇒-q)	(p⇒q)∧(p⇒-q)	((p⇒q)∧(p⇒-q))⇒-p (vu)
V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	F	V
V	N	N	F	V	N	V	N	N
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	N	V	V	V	V	V	V	V
N	V	N	V	F	N	F	F	V
N	F	V	V	V	F	N	F	V
N	N	N	V	V	N	N	N	N

3. ((p⇒q)∧(p⇒−q))⇒−p : L0 “trivalent” faible

p	q	(p∨q)	-p	-q	(p⇒q)	(p⇒-q)	(p⇒q)∧(p⇒-q)	((p⇒q)∧(p⇒-q))⇒-p (vu)
V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	F	V
V	N	N	F	N	N	N	N	N
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	N	N	V	N	N	N	N	N
N	V	N	N	F	N	N	N	N
N	F	N	N	V	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N	N

XIII. Démonstration indirecte

1. ((−−p⇒q)∧(−−p⇒−q))⇒p

p	q	(p∨q)	-p	-q	(--p⇒q)	(--p⇒-q)	((--p⇒q)∧(--p⇒-q)	((--p⇒q)∧(--p⇒-q))⇒p (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	F	

V

2. ((--p⇒q)∧(--p⇒-q))⇒p : L0 "trivalent" fort

p	q	(p∨q)	-p	-q	(--p⇒q)	(--p⇒-q)	((--p⇒q)∧(--p⇒-q)	((--p⇒q)∧(--p⇒-q))⇒p (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	N	N	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V
F	N	V	V	V	N	V	N	V
N	V	N	V	F	V	F	F	V
N	F	V	V	V	F	V	F	V
N	N	N	V	V	N	V	N	N

3. ((--p⇒q)∧(--p⇒-q))⇒p : L0 "trivalent" faible

p	q	(p∨q)	-p	-q	(--p⇒q)	(--p⇒-q)	((--p⇒q)∧(--p⇒-q)	((--p⇒q)∧(--p⇒-q))⇒p (vu)
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	N	N	F	N	N	N	N	N
F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V
F	N	N	V	N	N	N	N	N
N	V	N	N	F	N	N	N	N
N	F	N	N	V	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N	N

Chapter III.

3-2-valued Logic : Conclusion

thr.1.1 Truth Table isomorphism of Fonction

IV. Conclusion

Il est possible d'en tirer ici cette conclusion que seul la Loi de Morgan et toute généralisation des formules ayant les propriétés qui sont celles de la Loi de Morgan notamment la négation –(x) et (--x) par ex. –(p∧1–p) ca permet d'obtenir une formule de L0 classique et L0 "trivalent" qui est une loi ou qui a une valuation égale à une formule tautologique ou une loi de L0 classique donc un isomorphisme.

Les lois de De Morgan sont des identités entre propositions logiques. Elles ont été formulées par le mathématicien britannique Augustus De Morgan (1806-1871) qui veulent dire qu'en logique classique, la négation de la disjonction de deux propositions est équivalente à la conjonction des négations des deux propositions, ce qui signifie que « –(A ∨ B) » est égale à « (--A) ∧ (--B) ». Et enfin Toujours en Logique classique, la négation de la conjonction de deux propositions est équivalente à la disjonction des négations des deux propositions, ce qui signifie que « –(A ∧ B) » est égale à « (--A) ∨ (--B) ».

Il s'agit bien ici d'isomorphisme des groupes comme le dit Le Premier théorème d'isomorphisme : Soit G et G′ deux groupes et f:G→G′ f : G → G ′ un morphisme de groupes. Alors f induit un isomorphisme ^f de G/kerf sur f(G) défini par ^f(xH)=f(x) f ^ (x H) = f (x) où H est le noyau de f . Il convient de citer pour ces isomorphisme très discrets la citation de L. wittgenstein des Cahiers sur l'arithmétique et la logique de premier ordre destinée aux mathématiciens de profession et aux logiciens : « pour éviter de se livrer à des pensées et des doutes du genre que je développe. Il (le mathématicien) a appris à les considérer comme quelque chose de méprisable et... il en a acquis une répulsion comme infantile. C'est-à-dire que je trotte tous les problèmes qu'un enfant qui apprend l'arithmétique, etc., trouve difficiles, les problèmes que l'éducation réprime sans les résoudre. Je dis à ces doutes refoulés : vous avez tout à fait raison, continuez à demander, exigez des éclaircissements » _

- Il convient tout de même de noter que ces propriétés marcheront

pour une formule de L0 ou de L1 “trivalent” fort or ces mêmes propriétés ne marcheront jamais pour une formule de L0 ou de L1 “trivalent” faible et cela en raison de la valuation particulière de N dans toute formule de L0 ou de L1 “trivalent” faible de Kleene.

Bibliography.

3-2-valued Logic : Bibliography

TEXTE INTEGRAL

1 Contribution(s)

Masterant de conférences en Philosophie, Analyse et critique des mondes sociaux, juridiques et politiques à l'Université Paris-VIII-Vincennes-Saint-Denis (France). J’effectue un mémoire en Philosophie de la Logique mathématique de L0 et L1. sous la direction de Pierre Cassou-Noguès à Saint-Denis. Cette publication contribue à mentionner donc ici que des documentations d’utilisation publique. Le texte et les autres éléments (illustrations, fichiers annexes importés) sont sous Licence Specific OpenEdition Books, sauf mention contraire.

2 Sources

Kleene , Stephen Cole , 1909- Mathematical logic / Stephen Cole Kleene . p . cm . Originally published : New York : Wiley , 1967 . Includes bibliographical references and index . ISBN 0-486-42533-9 (pbk .) 1. Mathematics - Philosophy . 2

Jan Lukasiewicz, Ecrits logiques et philosophiques, Paris, Vrin, 2013.

1.1. Livres

Kleene , Stephen Cole , 1909- Mathematical logic / Stephen Cole Kleene . p . cm . Originally published : New York : Wiley , 1967 . Includes bibliographical references and index . ISBN 0-486-42533-9 (pbk .) 1. Mathematics - Philosophy . 2

Eubulide, Sextus Empiricus, Adversus mathematicos, VII 13.

Noam Chomsky . 4. Daniel Yergin , « The Chomskyan Revolution » ,. 1. Dans Language and Politics (1988) , Chomsky ... Syntactic Structures , Mouton & Co. , La Hague , 1957 , chapitre v . 3. Curieusement , l'éditeur de la première

Krivine Jean-Louis (1960 - 1967 docteur d'État en mathématiques à Paris-Diderot), Théorie des ensembles, Paris, Cassini, coll. « Nouvelle bibliothèque mathématique », 2007, 2e éd. (1re éd. 1998), 271 p. (ISBN 978-2-84225-096-6).

Floyd Juliet, (1982 - 1990 doctorate in philosophy at Harvard University), « Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics », p. 75–128 ; The Oxford Handbook of Philosophy of Logic and Mathematics, 2005.

1.2. Articles

Eric W. Weisstein, « de Morgan's Laws [archive] », sur MathWorld

1.3. Dictionnaires

The Nature of Law - Stanford Encyclopedia of Philosophy

Jaucourt, La Chapelle, Boucher d'Argis, L'Encyclopédie, 1re éd. 1751 (Tome 13, p. 354-357). ► PREUVE.

D’Alembert, d'Aumont Arnulphe L’Encyclopédie, 1re éd. 1751 (Tome 4, p. 822-824). ► DÉMONSTRATION.